

『ダイヤモンドはなぜ美しい?』への の付録

これは、拙著『ダイヤモンドはなぜ美しい? — 離散調和解析入門 —』の付録である。以下、この本の内容を引用するときは、「本文」という言い方をする。付録では、結晶格子のより進んだ理論に興味を持つ読者の便宜を考えて、本文では限られたページ数のため扱うことのできなかつた話題、特に結晶群と結晶格子の標準的実現について解説する(付録 A)。さらに、問に対する答えと(付録 B)、主な登場人物の紹介(付録 C)も併せて掲載する。

付録 A では、数学科の 4 年までに学ぶ数学の知識を仮定する。

目次

付録 A	1
A.1 結晶を解析する — ブラッグの条件 —	1
A.2 極限ノルム	3
A.3 結晶群と結晶格子	6
A.4 結晶格子と標準的実現の作り方	11
付録 B 問の答	23
付録 C 主な登場人物の紹介	49
参考文献	61

付録 A

A.1 結晶を解析する — ブラッグの条件 —

本文(1.2節)で述べたように、結晶の中の原子を直接観察することはできない。ここでは、原子の配列を間接的に調べる方法(X線構造解析)を簡単に解説しよう。

波長(wave length)が短い電磁波¹であるX線²を結晶に当てて散乱した結果をスクリーンに映すと、波の干渉³(interference)による模様が出現する。この干渉模様の多数のデータから原子の配列を推測する。

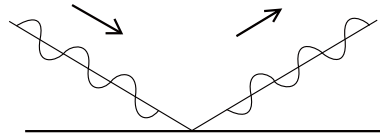


図 A.1 波の反射

X線とその散乱の様子を単純化して、1次元の波動とその反射を考える。そして、原子の配列が2つの層からなり、それぞれの層で反射が起きると仮定する。この層の幅 d を知りたい。

¹ 可視光線も電磁波の1種である。

² X線の波長は $0.01 \times 10^{-8} \text{ cm}$ と $10 \times 10^{-8} \text{ cm}$ の間であり、これは可視光線の波長の $1/1000 \sim 1/100,000$ である。

³ 2つ以上の同種の波動が同一点で合ったとき、重なって互いに強めあい、または弱めあう現象のこと。

まず、波長が ℓ の 1 次元の波動は、周期 ℓ を持つ周期関数 (periodic function) $f(x)$ で表現されることを思い出そう。すなわち、 $f(x)$ は $f(x+\ell) = f(x)$ がすべての実数 x について成立するような関数であり、時刻 0 における波の形が $f(x)$ であるとき、時刻 t における波は $f(x-vt)$ により与えられる。 v は波の進行速度である。 f としては、特に正弦波 $f(x) = a \sin kx$ を考える ($a > 0$)。ここで、 $k = (2\pi)/\ell$ であり、 a は振幅 (amplitude) とよばれる。

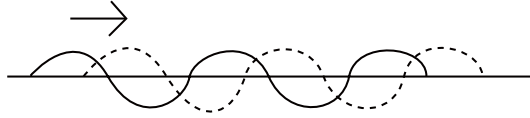


図 A.2 波動

位相 (phase) のみが異なる 2 つの波は $f(x-vt)$, $f(x+\alpha-vt)$ と表される。 α をこれら 2 つの波の位相差とよぶ。これらの波が直線上を同時に進行するときには、

$$f(x-vt) + f(x+\alpha-vt)$$

のように「重ね合わせられた」波が作られる。特に正弦波の場合は、恒等式

$$\sin X + \sin Y = 2 \cos \frac{X-Y}{2} \sin \frac{X+Y}{2}$$

を利用すれば、

$$\begin{aligned} f(x-vt) + f(x+\alpha-vt) &= 2a \cos \frac{k\alpha}{2} \sin \left(k \left(x + \frac{\alpha}{2} - vt \right) \right) \\ &= 2 \cos \frac{k\alpha}{2} f \left(x + \frac{\alpha}{2} - vt \right) \end{aligned}$$

が得られる。これは、 $|\cos((k\alpha)/2)| = 1$ すなわち $(k\alpha)/2 \in \pi\mathbf{Z}$ (言い換えれば $\alpha \in \ell\mathbf{Z}$) であるとき、最も強い干渉が起きることを意味する。

図 A.3 では、 A から発射されて上層で反射する X 線と、 A に近接する B から発射されて下層で反射する X 線を描いている。反射する前は、前者の経路 APA' を基準として位相差はないと仮定する。反射後は、図の右側の記号を用いれば、 $\alpha = CQ + QD = 2QD$ の位相差が生じる。 $\angle DQE = \theta$ とおけば、 $DQ = d \sin \theta$ となるから、結局 $\alpha = 2d \sin \theta$ となる。こうして、最も強い干渉が起きるのは、 $2d \sin \theta = n\ell$ となる整数 n が存在するときであることがわかる。これがブラッグの条件とよばれる式である。多数のデータを

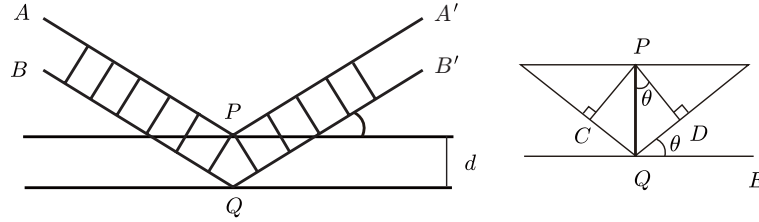


図 A.3 干渉

集めれば、この条件から d を測定できることになる。

上記の説明は状況を著しく簡単化しているが、本質的にはこの説明で十分である。

A.2 極限ノルム

本文の 6.3 節で定義したノルム $\|\cdot\|_\infty$ は、 $B_n(x)$ に属すすべての頂点を考慮に入れて定義したノルムである。他方、 $\|\cdot\|_\infty$ を周期格子に関する格子点に着目して定義する方法もある。これについて簡単に解説しよう。

L を d 次元結晶格子 $X = (V, E)$ の抽象的周期格子群とし、 $d(x, y)$ を X 上のグラフ距離とする。固定した $x \in V$ に対して $|\sigma| = d(x, \sigma x) (\sigma \in L)$ とおくと、グラフ距離の不変性 (問 6.4) により、 $|\sigma| = d(x, \sigma^{-1}x) = d(\sigma x, x) = |\sigma|$ が得られる。また、三角不等式と不変性 (問 6.4) により、

$$\begin{aligned} |\sigma + \mu| &= d(x, \sigma\mu x) \leq d(x, \sigma x) + d(\sigma x, \sigma\mu x) \\ &= d(x, \sigma x) + d(x, \mu x) = |\sigma| + |\mu| \end{aligned}$$

である (L は加法群と考えて、マイナスと和の記号を用いている)。

周期準同型写像 ρ を用いて、 L を \mathbb{R}^d の格子群 $\rho(L)$ と同一視する。このとき、 $|\cdot|$ は $\rho(L)$ 上で定義されていると考えられるが、これはそのままでは \mathbb{R}^d のノルムを制限したものにはなっていない (たとえば、 $n\sigma$ を σ の n 個の和とすると、 $|n\sigma| \leq n|\sigma|$ は成り立つが、ノルムの制限であれば成立すべき等号は一般には成り立たない)。そこで、 $\sigma \in \rho(L)$ に対して $\|\sigma\|^{\text{lim}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n)|n\sigma|$ とおく。極限が存在することは、次の補題による。

補題 A.1. 非負数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が、任意の m, n に対して $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ を満たすとき、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/n$ が存在する。

証明 上極限, 下極限の概念を使う. 読者の便宜を考えて, 定義を与えておこう. 一般に, 数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, 任意の正数 ϵ が与えられたとき, a) 無限に多くの n について, $c_n > c - \epsilon$ が成り立つ, b) ϵ に応じて決まる N が存在して $n \geq N$ なる n について $c_n < c + \epsilon$ である, の 2 条件が成り立つならば, c を $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上極限といい, これを $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n$ と表す. 下極限の定義も同様であり, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n$ と表す. 有界な数列の上極限と下極限は常に存在し, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n$ が成り立つ. $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限が存在するための必要十分条件は, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n$ が成り立つことであり, このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n$ である. さらに, 2 つの数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $c_n \leq d_n$ であれば, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} d_n$ が成り立つ.

$\{a_n\}$ に関する条件から, $a_n \leq na_1$ となるから, 数列 $\{(1/n)a_n\}$ は上に有界であり, $a_n \geq 0$ であるから下にも有界である. 自然数 m を留めたとき, 任意の自然数 n を $n = qm + r$ ($0 \leq r < m$) と表す (n を m で割ったときの商が q であり, 余りが r である). $a_n \leq a_{qm} + a_r = qa_m + a_r$ であるから,

$$\frac{1}{n}a_n \leq \frac{q}{n}a_m + \frac{1}{n}a_r = \frac{n-r}{n} \frac{1}{m}a_m + \frac{1}{n}a_r$$

が成り立つ. $n \rightarrow \infty$ とするとき, r は n によらずに有界であるから $(n-r)/n \rightarrow 1$ および $(1/n)a_r \rightarrow 0$ である. よって

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}a_n \leq \frac{1}{m}a_m$$

が得られる. 右辺の下極限を取れば,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}a_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m}a_m$$

となるから, 逆向きの不等式が成り立つことに注意すれば $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (1/n)a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (1/m)a_m$ が導かれる. こうして $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n)a_n$ の存在が示された. \square

$a_n = |n\sigma|$ とおくとき, $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ が成り立つから, 上の補題により極限 $\|\sigma\|^{\lim} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n)|n\sigma|$ が存在する. こうして定義された $\|\cdot\|^{\lim}$ は, $\|\sigma + \mu\|^{\lim} \leq \|\sigma\|^{\lim} + \|\mu\|^{\lim}$ を満たすばかりでなく, 任意の整数 n について, $\|n\sigma\|^{\lim} = n\|\sigma\|^{\lim}$ を満足する. 実際, $n > 0$ の場合は

$$\|n\sigma\|^{\lim} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k}|kn\sigma| = n \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kn}|kn\sigma| = n\|\sigma\|^{\lim}$$

であり, $n \leq 0$ の場合は $|\sigma| = |\sigma|$ を利用すればよい.

$\|\cdot\|^{\text{lim}}$ が \mathbf{R}^d のノルムに拡張されることを確かめよう. $\rho(L)^{\mathbf{Q}}$ により, $\rho(L)$ の \mathbf{Z} -基底に対する有理数係数の 1 次結合全体からなる集合を表す. 任意の $\mathbf{x} \in \rho(L)^{\mathbf{Q}}$ に対して, $n\mathbf{x} \in \rho(L)$ となる自然数が存在することに注意. まず, $\|\cdot\|^{\text{lim}}$ を $\rho(L)^{\mathbf{Q}}$ に拡張する. このため, $\mathbf{x} \in \rho(L)^{\mathbf{Q}}$ に対して, $n\mathbf{x} \in \rho(L)$ となる自然数 n を取り, $\|\mathbf{x}\|^{\text{lim}} = \frac{1}{n}\|n\mathbf{x}\|^{\text{lim}}$ と定める. この定義は n の取り方によらない. これを確かめるには, $n\mathbf{x} \in \rho(L)$ となるような最小な自然数 n を n_0 とするとき, $n\mathbf{x} \in \rho(L)$ であるような一般の n は n_0 の倍数であることに注意すればよい (n が n_0 の倍数でなければ, $n = qn_0 + r$ ($0 < r < n_0$) と表したとき, $r\mathbf{x} = n\mathbf{x} - qn_0\mathbf{x} \in \rho(L)$ となって, n_0 の最小性に反する). こうして定義された $\rho(L)^{\mathbf{Q}}$ 上の関数 $\|\cdot\|^{\text{lim}}$ はノルムと似た性質

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^{\text{lim}} &\leq \|\mathbf{x}\|^{\text{lim}} + \|\mathbf{y}\|^{\text{lim}} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \rho(L)^{\mathbf{Q}}), \\ \|c\mathbf{x}\|^{\text{lim}} &= |c|\|\mathbf{x}\|^{\text{lim}} \quad (\mathbf{x} \in \rho(L)^{\mathbf{Q}}, c \in \mathbf{Q}), \\ \|\mathbf{x}\|^{\text{lim}} = 0 &\iff \mathbf{x} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

を満たす. たとえば 1 番目の不等式は, $m\mathbf{x}, n\mathbf{y} \in \rho(L)$ とするとき, $mn(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \in \rho(L)$ であるから

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^{\text{lim}} &= \frac{1}{mn}\|mn(\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^{\text{lim}} \leq \frac{1}{mn}\|mn\mathbf{x}\|^{\text{lim}} + \frac{1}{mn}\|mn\mathbf{y}\|^{\text{lim}} \\ &= \|\mathbf{x}\|^{\text{lim}} + \|\mathbf{y}\|^{\text{lim}}\end{aligned}$$

となって確かに成り立つ. 他の性質の証明も同様である.

$\|\cdot\|^{\text{lim}}$ がさらに \mathbf{R}^d に拡張されることを見よう. $\|\cdot\|$ を \mathbf{R}^d の通常のノルムとしたとき,

$$\|\mathbf{x}\|^{\text{lim}} \leq c\|\mathbf{x}\| \quad (\mathbf{x} \in \rho(L)^{\mathbf{Q}})$$

が成り立つような正数 c が存在する. 実際, $\rho(L)$ の \mathbf{Z} -基底を $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$ とするとき, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_d\mathbf{a}_d$ と表せば, コーシー-シュワルツの不等式により

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|^{\text{lim}} &\leq |x_1|\|\mathbf{a}_1\|^{\text{lim}} + \dots + |x_d|\|\mathbf{a}_d\|^{\text{lim}} \\ &\leq (|x_1|^2 + \dots + |x_d|^2)^{1/2} ((\|\mathbf{a}_1\|^{\text{lim}})^2 + \dots + (\|\mathbf{a}_d\|^{\text{lim}})^2)^{1/2}\end{aligned}$$

であるから, $c = ((\|\mathbf{a}_1\|^{\text{lim}})^2 + \dots + (\|\mathbf{a}_d\|^{\text{lim}})^2)^{1/2}$ とおけば求める不等式が得られる.

実数の集合における有理数の稠密性（実数が有理数で近似できること）を使えば，任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$ に対して， $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\| = 0$ であるような $\rho(L)^{\mathbf{Q}}$ における列 $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ が取れる．このとき，ノルムに対する三角不等式により

$$\left| \|\mathbf{x}_m\|^{\text{lim}} - \|\mathbf{x}_n\|^{\text{lim}} \right| \leq \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n\|^{\text{lim}} \leq c \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n\|$$

が成り立つから， $\{\|\mathbf{x}_n\|^{\text{lim}}\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー（基本）列である．よって， $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n\|^{\text{lim}}$ が存在する．この極限を改めて $\|\mathbf{x}\|^{\text{lim}}$ とおけば，これが求める拡張になっていることは容易に確かめられる． $\|\cdot\|^{\text{lim}}$ は，その定義からグラフ距離と周期格子 $\rho(L)$ にのみ依存していることに注意しよう．すなわち，周期格子が同じであれば， $\|\cdot\|^{\text{lim}}$ は X の周期的実現の取り方にはよらない．

証明は略すが， $\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \|\mathbf{x}\|^{\text{lim}}$ ($\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$) となることが証明される ([40])．この事実は，本文の定理 6.2 の証明において基本的役割を果たす．

A.3 結晶群と結晶格子

群論と位相空間の知識を仮定して，結晶群に関する事実について述べよう ([42])．このため，合同変換についての簡単な事実から始める． \mathbf{R}^d の合同変換群を $M(d)$ により表す． $T \in M(d)$ は，直交変換 A とベクトル $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^d$ を使って

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{a}$$

と表されるから， $T = (A, \mathbf{a})$ と記すことにする． $T_1 = (A_1, \mathbf{a}_1)$ ， $T_2 = (A_2, \mathbf{a}_2)$ に対して，

$$T_1 T_2(\mathbf{x}) = T_1(A_2\mathbf{x} + \mathbf{a}_2) = A_1(A_2\mathbf{x} + \mathbf{a}_2) + \mathbf{a}_1 = A_1 A_2 \mathbf{x} + A_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1.$$

よって， $(A_1, \mathbf{a}_1)(A_2, \mathbf{a}_2) = (A_1 A_2, A_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1)$ となる．また， $(A, \mathbf{a})^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}\mathbf{a})$ ， $(A, \mathbf{a})(B, \mathbf{b})(A, \mathbf{a})^{-1} = (ABA^{-1}, -ABA^{-1}\mathbf{a} + A\mathbf{b} + \mathbf{a})$ であることは容易にわかる．特に， I を \mathbf{R}^d の恒等変換とすると

$$(A, \mathbf{a})(I, \mathbf{b})(A, \mathbf{a})^{-1} = (I, A\mathbf{b}), \quad (\text{A.1})$$

$$(I, \mathbf{a})(B, \mathbf{b})(I, \mathbf{a})^{-1} = (B, -B\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{a}) \quad (\text{A.2})$$

が成り立つ．(A.1) は，平行移動からなる $M(d)$ の部分群は正規部分群であることを意味している． $O(d)$ を直交群とするとき， $p(A, \mathbf{a}) = A$ により定義される写像 $p: M(d) \rightarrow O(d)$ は準同型写像であり， p の核 $\text{Ker } p = p^{-1}(I)$ は平行移動からなる群に一致する．以下，対応 $(I, \mathbf{a}) \longleftrightarrow \mathbf{a}$ により，平行移

動の群を \mathbf{R}^d と同一視する .

結晶群の厳密な定義を与えよう .

定義 d 次元結晶群は, $M(d)$ の離散的な部分群 G で, 商空間 \mathbf{R}^d/G がコンパクトになるようなものである . ここで, 「離散的」という意味は, $M(d)$ の位相に関する用語であるが, 次のようにも言い換えられる . $Gx = \{gx; g \in G\}$ が \mathbf{R}^d において離散的であるような $x \in \mathbf{R}^d$ が存在する .

次の定理はビーベルバッハ (L. Bieberbach; 1886–1982) による .

定理 A.1. G を d 次元結晶群とする .

- (1) $H = G \cap \mathbf{R}^d$ は d 次元格子群である .
- (2) H は G の正規部分群であり, 剰余群 (商群) G/H は有限群である . さらに, H は G の極大アーベル部分群である . すなわち, H を含むアーベル部分群は H と一致する .
- (3) G_1, G_2 を同型な d 次元結晶群とすると, $TG_1T^{-1} = G_2$ であるようなアフィン変換 T が存在する .
- (4) d 次元結晶群の同型類は有限個である .

結晶群の理論は, 結晶のミクロの構造が知られるずっと以前にヘッセル (J.P.C. Hessel) により始まった (1830 年) . これに関連して, 彼は空間の直交群の有限部分群をすべて数え上げたが, その結果は以後何度も再発見されている . これは, 本文の 2.5 節で解説した正多面体群に密接に関係する . ブラベー (A. Bravais) は空間における格子を, それに働く直交群の有限部分群とともに分類することにより, それらは本質的に 14 種に分類されることを見出した (1850 年) . その後, ジョルダン (C. Jordan), ソーンケ (L. Sohncke), フェドロフ (E.S. Fedorov) の研究を経て, シェーンフェリス (A. Schoenflies; 1891 年), バーロウ (W. Barlow; 1896 年) により結晶群は 230 個の種類に完全に分類された . 一般の次元の結晶群についても, ヒルベルト (D. Hilbert) が 1900 年に有名な「23 の問題」の第 18 番目として分類問題を提出して以来, 多くの研究が行われてきた . 現在, 4 次元の結晶群の分類が完成している . なお, 2 次元結晶群については, 装飾上の必要性から古くから経験的に知られていた .

一般に, 群 G とその部分群 H に対して, 剰余集合 G/H が有限集合であるとき, H は G の中で有限指数を持つといい, G/H の要素の数を $[G, H]$ により表して, H の G における指数という . H_1, H_2 を G の有限指数を持

つ部分群とすると, $H_1 \cap H_2$ も G の中で有限指数を持つ. また, H_1, H_2 を $H_2 \subset H_1 \subset G$ であるような部分群とすると, H_2 が G の中で有限指数を持てば, H_1 も G の中で有限指数を持つ. また, H_2 が H_1 の中で有限指数を持ち, H_1 が G の中で有限指数を持つ部分群であれば, H_2 は G の中で有限指数を持ち, $[G, H_2] = [G, H_1][H_1, H_2]$ が成り立つ.

定理における H の正規性を確かめるのは容易である. 実際, $(A, \mathbf{a}) \in G$, $(I, \mathbf{b}) \in H$ とするとき, (A.1) から $(A, \mathbf{a})(I, \mathbf{b})(A, \mathbf{a})^{-1} = (I, A\mathbf{b}) \in G \cap \mathbb{R}^d = H$ であるから, H は G の正規部分群である.

(1), (3), (4) の証明は簡単ではない (証明については [42] を参照せよ).

(1) が正しいという仮定の下で, H の極大アーベル性を示そう. $(A, \mathbf{a}) \in G$ が H の任意の要素と可換と仮定する. (I, \mathbf{b}) を H の任意の要素とすると, 再び $(A, \mathbf{a})(I, \mathbf{b})(A, \mathbf{a})^{-1} = (I, A\mathbf{b})$ を使えば, $(I, A\mathbf{b}) = (I, \mathbf{b})$ であること, すなわち $A\mathbf{b} = \mathbf{b}$ となる. H は格子群であるから, 特に \mathbb{R}^d の基底を含むので, $A = I$ が結論され, $(A, \mathbf{a}) = (I, \mathbf{a}) \in H$ となる. これは, H が極大アーベル群であることを意味する.

G/H が有限群であることを確かめよう. $p(G) = K$ とおくと, 全射準同型写像 $p: G \rightarrow K$ の核は H であるから, 準同型定理により G/H は K と同型である. よって K が有限群であることを示せばよい. $A \in K$ に対して, $p(A, \mathbf{a}) = A$ となる $(A, \mathbf{a}) \in G$ を取れば, $(I, \mathbf{b}) \in H$ に対して, $(A, \mathbf{a})(I, \mathbf{b})(A, \mathbf{a})^{-1} = (I, A\mathbf{b})$ であることから, $A(H) = H$ が導かれる. 格子群 H の \mathbb{Z} -基底を選んでおけば, A は $GL_d(\mathbb{Z})$ の要素と見なされる. ここで, $GL_d(\mathbb{Z})$ は, A および A^{-1} の双方が整数を成分とするような可逆行列 A からなる群である. よって K は直交群 $O(d)$ と $GL_d(\mathbb{Z})$ の共通部分に一致し, $O(d)$ のコンパクト性と $GL_d(\mathbb{Z})$ の離散性から K は有限群であることが示される.

一般に, 群 G に対して, $g \in G$ の共役類 $[g]$ は集合 $\{hgh^{-1}; h \in G\}$ のことであるが, $S(G)$ により $[g]$ が有限集合となるような g 全体からなる集合とする. g と可換な要素全体からなる部分群 (g の中心化群) $C_g = \{h \in G; gh = hg\}$ を考えれば,

$$g \in S(G) \iff C_g \text{ は } G \text{ の中で有限指数を持つ}$$

が成り立つ. 実際, $hgh^{-1} = h'gh'^{-1} \iff h \in h'C_g$ であることに注意すれば, 対応 $hgh^{-1} \in [g] \mapsto hC_g \in G/C_g$ は $[g]$ から G/C_g への全単射を与えることがわかるからである.

$S(G)$ は G の正規部分群である．これを確かめるには，

$$hg_1g_2h^{-1}=(hg_1h^{-1})(hg_2h^{-1}), \quad hg^{-1}h^{-1}=(hgh^{-1})^{-1}, \quad [hgh^{-1}]=[g]$$

を使えばよい．

G が結晶群のときは， $S(G) = H$ であることを示そう． $h = (I, \mathbf{b}) \in H$ に対して， $[h] = \{(I, A\mathbf{b}); (A, \mathbf{a}) \in G\}$ は有限集合であるから， $h \in S(G)$ である．逆に， $g = (A, \mathbf{a}) \in S(G)$ とすると，

$$(I, \mathbf{b})g(I, \mathbf{b})^{-1} = (A, (I - A)\mathbf{b} + \mathbf{a}) \quad ((I, \mathbf{b}) \in H)$$

が有限集合をなすから， $A = I$ すなわち $g \in H$ でなければならない．

今示したことを使うと，結晶群 G に対して， H は有限指数を持つアーベル部分群の中で最大なものであることが証明できる．なぜなら， L を G の中で有限指数を持つアーベル部分群とすると，任意の $g \in L$ に対して， $L \subset C_g$ であるから， C_g は有限指数を持つことが示される．よって， $g \in S(G) = H$ が導かれ， $L \subset S(G)$ が得られるからである．

抽象的な群としては，結晶群は次のように特徴付けられる⁴．

定理 A.2. 群 G が d 次元結晶群に同型であるための必要十分条件は， \mathbf{Z}^d と同型な部分群 H で，

- (1) H は正規部分群であり，剰余群 G/H は有限群である
- (2) H は G の極大アーベル部分群である

を満たすものを含むことである．ただ 1 つ定まる H を， G の最大格子群 (maximal lattice group) という．

注意 A.1. (1) $K = G/H$ の要素の位数⁵については次のことが知られている． K が位数 n の要素を含めば， $\varphi(n) \leq d$ である．ここで $\varphi(n)$ は n と互いに素であるような自然数 k で $1 \leq k < n$ を満たすもの数である (φ はオイラーの関数とよばれる)． $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ を n の素因数分解とするとき，

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

であることが知られている．具体的には

$$\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 1, \varphi(3) = 2, \varphi(4) = 2, \varphi(5) = 4, \varphi(6) = 2, \varphi(7) = 6$$

⁴ アウスランダー (L. Auslander)-倉西の定理．[42] 参照．

⁵ 一般に，群 K の要素 k の位数は $k^n = 1$ となる最小の自然数 n のことである．

である .

$$(p_1 - 1) \cdots (p_k - 1) = p_1 \cdots p_k \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \leq \varphi(n)$$

に注意すれば, $\varphi(n) \leq 3$ であるような n は $2^{e_1} 3^{e_2}$ の形をしていることがわかる . よって, $\varphi(n) \leq 3$ ならば, $n = 1, 2, 3, 4, 6$ である .

(2) 結晶群は, 有限指数を持つ有限生成アーベル部分群を含むが, 一般にこのような群は仮想的アーベル群 (virtually abelian group) とよばれる . ちなみに結晶群ではない仮想的アーベル群も存在する (たとえば, ねじれ (torsion) を持つ有限生成アーベル群は仮想的アーベル群であるが結晶群ではない) .

(3) 合同変換群 $M(d)$ は正規部分群である平行移動群 \mathbf{R}^d と直交群 $O(d)$ の半直積となるが, 一般には結晶群 G は H と K の半直積ではない . G の構造を調べるには, 次のように定義される写像 $\theta : K \times K \rightarrow H$ を利用しなければならない . $A \in K$ に対して, $(A, \mathbf{a}(A)) \in G$ を選ぶと,

$$(A, \mathbf{a}(A))(B, \mathbf{a}(B))(AB, \mathbf{a}(AB))^{-1} = (I, A\mathbf{a}(B) - \mathbf{a}(AB) + \mathbf{a}(A))$$

は H に属すから,

$$\theta(A, B) = A\mathbf{a}(B) - \mathbf{a}(AB) + \mathbf{a}(A)$$

とおく ($\mathbf{a}(A)$ は H に属すとは限らない) . θ は群拡大の理論において 2-サイクルとよばれ, これを用いて H と K から結晶群 G を構成することができる .

結晶格子 $X = (V, E)$ の標準的実現 Φ に対して, 準同型写像 $\rho : \text{Aut}(X) \rightarrow M(d)$ が $\Phi(gx) = \rho(g)\Phi(x)$ ($g \in \text{Aut}(X), x \in V$) が成り立つように定められる (定理 4.5) . $\rho(g) = (A(g), \mathbf{a}(g))$ とおく . 外部対称性の群である ρ の像 $\rho(\text{Aut}(X))$ が結晶群であることは, 結晶群の定義から直ちにわかる . しかし, 一般には $\text{Aut}(X)$ 自身は結晶群と同型ではない . もし標準的実現 Φ が非退化であれば, $\rho : G \rightarrow M(d)$ も単射であるから, $\text{Aut}(X)$ は結晶群と同型である (非退化性の定義については, 本文の 2.2 節と 4.6 節参照) . Φ が非退化でない場合は, 「各点収束位相」により $\text{Aut}(X)$ を位相群と考えたとき, 一意に決まる極大コンパクト正規部分群 $N \subset \text{Aut}(X)$ が存在して, 剰余群 $\text{Aut}(X)/N$ が結晶群と同型になる ([37]) . 実際, N は ρ の核 $\text{Ker } \rho = \rho^{-1}(1)$ に一致する .

例 A.1. 図 A.4 の 1 次元結晶格子に対して, その標準的実現 (による像) は各重複辺が 1 辺に重なった形の 1 次元標準格子であり, $\text{Ker } \rho$ は \mathbf{Z}_2 の無限直積 $\prod \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_2^{\mathbf{Z}}$ と同型である ($\prod \mathbf{Z}_2$ の位相は離散位相の直積位相である) .

標準的実現が非退化であるような結晶格子を, 非退化な結晶格子 (non-degenerated crystal lattice) とよぶことにしよう (標準的実現の一意性によ

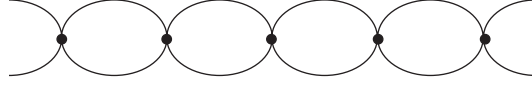


図 A.4 1次元結晶格子

り、非退化性は抽象的グラフとしての結晶格子のみによる概念である)。非退化結晶格子の自己同型群 $\text{Aut}(X)$ は結晶群(と同型)であるから、その最大格子群を L_0 とするとき、任意の抽象的周期格子群は L_0 に含まれる。この意味で、 L_0 は抽象的最大周期格子群であり、本文の第1章で述べた最大周期格子群の抽象化と考えられる。

L_0 に関する基本有限グラフを $X_0 = (V_0, E_0)$ とする。 L_0 は $\text{Aut}(X)$ の正規部分群であるから、任意の $g \in \text{Aut}(X)$ に対して、

$$gL_0x = L_0gx \quad (x \in V), \quad gL_0e = L_0e \quad (e \in E)$$

により X_0 の自己同型写像を定義することができる。こうして準同型写像 $\pi: \text{Aut}(X) \rightarrow \text{Aut}(X_0)$ が定まる。一般には π は全射ではない。

$\text{Ker } \pi = L_0$ を確かめよう。 $g \in \text{Ker } \pi$ に対して $L_0ge = gL_0e = L_0e$ であるから、 $ge = \sigma_e e$ となるような $\sigma_e \in L_0$ が(ただ1つ)存在する。 $o(e) = o(e')$ であるとき、

$$\begin{aligned} \sigma_e o(e) &= o(\sigma_e e) = o(ge) = go(e) = go(e') = o(ge') = o(\sigma_{e'} e') \\ &= \sigma_{e'} o(e') = \sigma_{e'} o(e) \end{aligned}$$

であるから、 $\sigma_e = \sigma_{e'}$ である。同様に、 $o(e') = t(e)$ のとき、

$$\begin{aligned} \sigma_e t(e) &= t(\sigma_e e) = t(ge) = gt(e) = go(e') = o(ge') = o(\sigma_{e'} e') \\ &= \sigma_{e'} o(e') = \sigma_{e'} t(e) \end{aligned}$$

であるから、 $\sigma_e = \sigma_{e'}$ が成り立つ。 X の連結性から、 σ_e は e によらず一定の要素 $\sigma \in L_0$ に一致することが示され、 $g = \sigma$ となる。

A.4 結晶格子と標準的実現の作り方

与えられた有限グラフ $X_0 = (V_0, E_0)$ を基本有限グラフとする結晶格子とその標準的実現の作り方を述べておく。ここで初めて標準的実現の存在が確認されることになる。その方法は、被覆空間の理論とホモロジー論に依拠しており(代数的)位相幾何学の簡単な応用と言える。

まず, X_0 の 1 次ホモロジー群 (homological group) $H_1(X_0, \mathbf{R})$ を定義する. 頂点の形式的な 1 次結合

$$\sum_{x \in V_0} a_x x \quad (a_x \in \mathbf{R})$$

を 0-鎖 (chain) という. 0-鎖の全体は, V_0 を基底とするベクトル空間になる. これを $C_0(X_0, \mathbf{R})$ により表そう. さらに, 1-鎖を有向辺の形式的な 1 次結合

$$\sum_{e \in E_0} a_e e \quad (a_e \in \mathbf{R})$$

として定義するが, この場合は各 $e \in E_0$ に対して $\bar{e} = -e$ となることを要請する⁶. 1-鎖の全体にもベクトル空間の構造が入る. これを $C_1(X_0, \mathbf{R})$ により表す. 各辺の向きを 1 つ選び, それらの全体を E_0^o とすれば, これが $C_1(X_0, \mathbf{R})$ の基底になる (E_0^o を指定することを, X_0 に「向き」を与えるという).

境界作用素 (boundary operator) $\partial: C_1(X_0, \mathbf{R}) \rightarrow C_0(X_0, \mathbf{R})$ を $\partial(e) = t(e) - o(e)$ として定義しよう. そして 1 次ホモロジー群 $H_1(X_0, \mathbf{R})$ を, その核 $\text{Ker } \partial = \{\mathbf{x} \in C_1(X_0, \mathbf{R}); \partial \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ として定義する. 0 次ホモロジー群 $H_0(X_0, \mathbf{R})$ は商ベクトル空間 $C_0(X_0, \mathbf{R})/\partial(C_1(X_0, \mathbf{R}))$ として定義される. (X_0 は連結なので) $\dim H_0(X_0, \mathbf{R}) = 1$ である. 同様に $H_1(X_0, \mathbf{Z}), H_0(X_0, \mathbf{Z})$ が, \mathbf{R} を整数のなす加法群 \mathbf{Z} に置き換えることにより定義される. さらに, 自然な包含関係 $H_1(X_0, \mathbf{Z}) \subset H_1(X_0, \mathbf{R})$ があり, $H_1(X_0, \mathbf{Z})$ は $H_1(X_0, \mathbf{R})$ の格子群である.

X_0 の閉じた路 $c = (e_1, \dots, e_n)$ に対して, 1-鎖 $e_1 + \dots + e_n \in C_1(X_0, \mathbf{Z})$ を同じ記号 c により表すと, $\partial c = 0$ が容易に確かめられるから, $c \in H_1(X_0, \mathbf{Z})$ である. 逆に, $H_1(X_0, \mathbf{Z})$ の任意の要素は, このような閉じた路から得られる 1-鎖として与えられる.

例 A.2. (1) 線形写像の理論を使えば,

$$\begin{aligned} \dim C_0(X_0, \mathbf{R}) - \dim C_1(X_0, \mathbf{R}) &= \dim H_0(X_0, \mathbf{R}) - \dim H_1(X_0, \mathbf{R}) \\ &= 1 - \dim H_1(X_0, \mathbf{R}) \end{aligned}$$

が得られるから, X_0 の頂点の数を v , 辺の数を e とおけば,

$$\dim H_1(X_0, \mathbf{R}) = 1 - v + e$$

⁶ 正確には, E_0 を基底とするベクトル空間の, $\{e + \bar{e}; e \in E_0\}$ で張られる部分空間による商ベクトル空間が $C_1(X_0, \mathbf{R})$ である.

が成り立つ． X_0 が平面グラフの場合， X_0 で分割したときの有界な領域の数を f とすれば，オイラーの定理 (2.3 節) により $\dim H_1(X_0, \mathbf{R}) = f$ を得る．さらに，各領域の境界に現れる閉じた路を c_1, \dots, c_f とすれば，それらは $H_1(X_0, \mathbf{Z})$ の \mathbf{Z} -基底となる．

(2) X_0 の全域木 (spanning tree) とは，木であるような X_0 の部分グラフであり，しかも X_0 のすべての頂点を含むものである．全域木は常に存在する (しかし一意ではない)． T を全域木とすると， T に含まれない無向辺の数は $\dim H_1(X_0, \mathbf{R})$ と一致する．実際， e_1, \dots, e_n を無向辺として， x_0 を T 内の頂点とすると， e_i の両端点と x_0 を結んで閉路 c_i が得られるが， c_1, \dots, c_n が $H_1(X_0, \mathbf{R})$ の \mathbf{Z} -基底を与える．

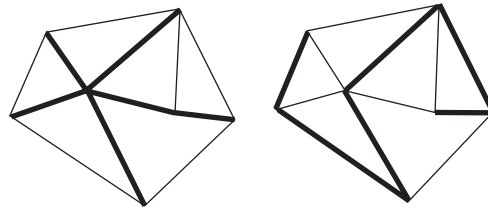


図 A.5 全域木

たとえば， X_0 を完全グラフ K_n とするとき，1 つの頂点から出る辺全体とそれらの端点全体は K_n の全域木をなす．よって，無向辺の個数が $n(n-1)/2$ であることに注意すれば，

$$\dim H_1(K_n, \mathbf{R}) = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

が得られる．

ホモロジーの概念は，電気回路に関する基本法則を見出したキルヒホフ (G.R. Kirchhoff) の仕事 (1845 年) の中に，その萌芽を見ることができる．さらに，高次元空間 (三角形分割された空間) に対するホモロジーが，ポアンカレにより考察され，組合せ位相幾何学の勃興に繋がった．20 世紀半ばには一般の位相空間の特異ホモロジー論が構築されて，20 世紀後半の代数的位相幾何学の発展に大きな影響を与えた．

被覆写像の理論を使うと，次の定理を証明することができる ([11]) ．

定理 A.3. (1) $X = (V, E)$ が抽象的周期格子群 L を持つ結晶格子であり，その基本有限グラフが X_0 であるとき，自然な全射準同型写像 $\mu : H_1(X_0, \mathbf{Z}) \rightarrow L$ が存在する．

(2) \mathbf{Z}^d に同型なアーベル群 L と全射準同型写像 $\mu : H_1(X_0, \mathbf{Z}) \rightarrow L$

に対して, X_0 を基本有限グラフとし, L を抽象的周期格子群として持つような d 次元結晶格子 X が存在する.

注意 A.2. X_0 の普遍被覆空間 \widehat{X}_0 は, X_0 の基本群 $\pi_1(X_0)$ を被覆変換群とする正則被覆空間であり, X_0 上の一般の被覆空間 X は $\pi_1(X_0)$ の部分群 Γ による \widehat{X}_0 の商グラフである. Γ が正規であれば, X は X_0 上の正則被覆空間であり, その被覆変換群は商群 $\pi_1(X_0)/\Gamma$ である. 非可換な被覆変換群 $\pi_1(X_0)/\Gamma$ を持つ X は非可換結晶格子とよばれる. なお, X_0 は木であり, 基本群 $\pi_1(X_0)$ は自由群 (要素の間に一切の関係が存在しない群) である.

非可換結晶格子の例として, 最も自然な形で登場するのがケイリー・グラフ (Cayley graph) である. G を有限生成群とし, $A \subset G$ を有限生成系とする (すなわち, G の任意の要素 g は, A の要素 a_1, \dots, a_n を用いて $g = a_1^{\pm} \cdots a_n^{\pm}$ と表される). $1 \notin A$ としよう. (G, A) から次のようにして連結グラフ $X(G, A) = (V, E)$ が得られる. $V = G$ とし, $g, h \in G$ が辺で結ばれるのは, $g = ha$ あるいは $h = ga$ となる $a \in A$ が存在することと約束する. $X(G, A)$ を (G, A) に付随するケイリー・グラフという. G は $V = G$ に左から作用し ($h \mapsto gh$), この作用は辺と頂点の結合関係を保つから, $X(G, A)$ にも作用する. しかも, G の V への作用と無向辺の集合への作用は共に自由である (すなわち, $gx = x$ となる $x \in V$ が存在すれば $g = 1$ であり, $ge = e$ あるいは $ge = \bar{e}$ となる $e \in E$ が存在すれば $g = 1$ である). この作用で頂点と辺を類別することにより得られるグラフ (商グラフ) はブーケ・グラフ (本文の 2.4 節参照) であり, $X(G, A)$ は G を被覆変換群とするブーケ・グラフ上の被覆グラフになる.

特に, G が無限位数の仮想的アーベル群とするとき, G は有限指数を持つ自由アーベル群 L を部分群として含み, L は $X(G, A)$ の抽象的周期格子群と見なされるから, $X(G, A)$ は結晶格子になる. $X(G, A)$ の標準的実現を使えば, $\text{Ker } \rho$ が有限群であり, $\rho(G)$ が結晶群となるような準同型写像 $\rho: G \rightarrow M(d)$ の存在が示される⁷ (d は L の階数).

上記の定理 (1) における全射準同型写像 μ は次のように与えられる. ホモロジー群 $H_1(X_0, \mathbf{Z})$ の要素を c とする. c は閉じた路から得られる 1-鎖としてよい. \tilde{c} を c の X におけるリフト (問 2.6) とするとき, $o(\tilde{c})$ と $t(\tilde{c})$ は X_0 の同じ頂点に写るから, $t(\tilde{c}) = \sigma o(\tilde{c})$ となる $\sigma \in L$ が存在し, $\mu(c) = \sigma$ である.

特に (2) において, $L = H_1(X_0, \mathbf{Z})$, $\mu = I$ (恒等写像) とするとき,

⁷ アウスランダー-倉西の定理の証明で用いられている方法を使って, 純群論的な証明も可能である (藤原耕二氏 (東北大学) による注意).

$H_1(X_0, \mathbf{Z})$ を抽象的周期格子群とするような結晶格子が存在するが、これを X_0 の最大アーベル被覆 (maximal abelian covering) として得られる結晶格子⁸という。

例 A.3. (1) 4.6 節で定義した d 次元ダイヤモンド格子は、図 4.16 のグラフの最大アーベル被覆として得られる結晶格子である。

(2) d 次元標準格子は、1 つの頂点と d 個のループ辺を持つグラフ (ブーケ・グラフ) の最大アーベル被覆として得られる結晶格子である。三角格子やカゴメ格子は、基本有限グラフの最大アーベル被覆ではない。

$e, e' \in E_0$ に対して

$$e \cdot e' = \begin{cases} 1 & (e' = e) \\ -1 & (e' = \bar{e}) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

とおく。これにより、 $C_1(X_0, \mathbf{R})$ に内積が導入され、 X_0 の向き E_0° は $C_1(X_0, \mathbf{R})$ の正規直交基底を与える。

この内積を $H_1(X_0, \mathbf{R})$ に制限する。全射準同型写像 $\mu : H_1(X_0, \mathbf{Z}) \rightarrow L$ に対して、 $H_1(X_0, \mathbf{R})$ の中でその核 $\text{Ker } \mu$ が張る部分空間を W とし、 $C_1(X_0, \mathbf{R})$ におけるその直交補空間 W^\perp と $H_1(X_0, \mathbf{R})$ の共通部分 $W^\perp \cap H_1(X_0, \mathbf{R})$ を H とおく。 H の次元は d であり、正規直交基底を選べば H はユークリッド空間 \mathbf{R}^d と同一視される。 $L = H_1(X_0, \mathbf{Z})$ の場合は、 $H = H_1(X_0, \mathbf{R})$ であることに注意しておく。

$P : C_1(X_0, \mathbf{R}) \rightarrow H$ を直交射影とする⁹。 $\text{Ker } P = (W^\perp \cap H_1(X_0, \mathbf{R}))^\perp = W + H_1(X_0, \mathbf{R})^\perp = W \oplus H_1(X_0, \mathbf{R})^\perp$ であることに注意しよう。各 $e \in E_0$ に対して、 e を $C_1(X_0, \mathbf{R})$ の要素と考え、 $P(e) = \mathbf{v}(e)$ とおく。こうして、素材 $\{\mathbf{v}(e)\}_{e \in E_0}$ が得られる。この素材から得られる周期的実現が、結晶格子 X の標準的実現になる。詳しく言えば、 $x_0 \in V$ を留めたとき、 $x \in V$ に対して $o(c) = x_0, t(c) = x$ となる路 $c = (e_1, \dots, e_n)$ を取り、

$$\Phi(x) = \mathbf{v}(e_1) + \dots + \mathbf{v}(e_n)$$

とおくことにより $\Phi : V \rightarrow H = \mathbf{R}^d$ を定めれば、 Φ が標準的実現になる

⁸ ホモロジー普遍被覆 (homological universal cover) ともいう。

⁹ テンソル積の概念を既知とすれば、ベクトル空間としては $H = L \otimes \mathbf{R}$ であり、 μ を線形写像に拡張した $\mu \otimes I_{\mathbf{R}} : H_1(X_0, \mathbf{R}) = H_1(X_0, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{R} \rightarrow L \otimes \mathbf{R}$ が P である。

(ここで, \mathbf{v} は E 上の関数と同一視している). これを証明しよう.

(1) Φ が矛盾なく定義されていること (well-definedness). $c' = (e'_1, \dots, e'_m)$ が $o(c') = x_0, t(c') = x$ を満たすとき,

$$\mathbf{v}(e_1) + \dots + \mathbf{v}(e_n) = \mathbf{v}(e'_1) + \dots + \mathbf{v}(e'_m)$$

が成り立つことを示さなければならない. このためには,

$$c'' = c\bar{c}' = (e_1, \dots, e_n, \bar{e}'_m, \dots, \bar{e}'_1)$$

により定義される閉じた路 c'' に対して, $P(c'') = \mathbf{0}$ が成立することを示せばよいが, $\mu(c'') = \mathbf{0}$ であるから, $c'' \in W \subset \text{Ker } P$ となり, $P(c'') = \mathbf{0}$ が成立する.

(2) Φ が周期的実現であること. $\sigma \in L, x \in V$ に対して, $o(c) = x, t(c) = \sigma x$ となる路 $c = (e_1, \dots, e_n)$ を取る. 明らかに

$$\Phi(\sigma x) = \Phi(x) + \mathbf{v}(e_1) + \dots + \mathbf{v}(e_n).$$

そこで, $\rho: L \rightarrow H$ を

$$\rho(\sigma) = \mathbf{v}(e_1) + \dots + \mathbf{v}(e_n) = P(c_0)$$

により定める. ここで c_0 は c を X_0 の射影して得られる閉じた路である ($\mu(c_0) = \sigma$ であることに注意). c'_0 を $\mu(c'_0) = \mu(c_0)$ を満たす X_0 の閉じた路とする. $c_0 - c'_0 \in \text{Ker } \mu \subset W \subset \text{Ker } P$ であるから, $P(c'_0) = P(c_0)$. よって $P(c_0)$ は σ のみに依存する.

$\sigma, \sigma' \in L$ に対して,

$$\Phi(x) + \rho(\sigma\sigma') = \Phi(\sigma\sigma'x) = \Phi(\sigma'x) + \rho(\sigma) = \Phi(x) + \rho(\sigma) + \rho(\sigma')$$

であるから, ρ は準同型写像である.

ρ が単射であることを確かめよう. $\rho(\sigma) = \mathbf{0}$, すなわち $P(c_0) = \mathbf{0}$ とすると,

$$c_0 \in H^\perp = W \oplus H_1(X_0, \mathbf{R})^\perp$$

であり, $c_0 \in H_1(X_0, \mathbf{Z})$ であるから, $c_0 \in W \cap H_1(X_0, \mathbf{Z}) = \text{Ker } \mu$. よって, $\sigma = \mu(c_0) = \mathbf{0}$ が得られる.

最後に, $\rho(L)$ が H の格子群であることを示す. L は \mathbf{Z}^d と同型であるから, \mathbf{R}^d の (標準) 格子群と考えてよい. $\mu: H_1(X_0, \mathbf{Z}) \rightarrow L$ は (一意的に) 線形写像 $\mu: H_1(X_0, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}^d$ に拡張されることに注意. 主張を確か

めるには, $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ を L の \mathbf{Z} -基底とすると, $\rho(\sigma_1), \dots, \rho(\sigma_d)$ がベクトル空間 H の基底であることを確かめれば十分. H の次元は d であるから, $\rho(\sigma_1), \dots, \rho(\sigma_d)$ が 1 次独立であることを示せばよい. そこで

$$a_1\rho(\sigma_1) + \dots + a_d\rho(\sigma_d) = \mathbf{0}$$

とする. c_1, \dots, c_d を $\mu(c_i) = \sigma_i$ を満たす X_0 の閉じた路とすると,

$$a_1P(c_1) + \dots + a_dP(c_d) = \mathbf{0}$$

であるから, $a_1c_1 + \dots + a_dc_d \in \text{Ker } P \cap H_1(X_0, \mathbf{R}) = W$ が得られる. よって, $\mathbf{0} = \mu(a_1c_1 + \dots + a_dc_d) = a_1\mu(c_1) + \dots + a_d\mu(c_d) = a_1\sigma_1 + \dots + a_d\sigma_d$ である. $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ は \mathbf{R}^d の基底であるから, $a_1 = \dots = a_d = 0$ が示される.

(3) Φ が調和的実現であること.

$$\sum_{e \in E_{0x}} \mathbf{v}(e) = \mathbf{0} \quad (x \in V_0)$$

を示せばよい (本文の定理 4.2). このためには, X_0 の任意の閉じた路 $c = (e_1, \dots, e_n)$ に対して,

$$\sum_{e \in E_{0x}} e \cdot c = 0 \quad (\text{A.3})$$

を示せばよい. なぜなら, これが成り立てば, $\sum_{e \in E_{0x}} e \in H_1(X_0, \mathbf{R})^\perp \subset \text{Ker } P$ だからである. (A.3) を確かめるには, c が x を通るとき, c に沿って x に「入る」ときに通る辺 e と, x を「出る」ときに通る辺 e' について,

$$\sum_{e \in E_{0x}} e \cdot (e + e') = 1 + (-1) = 0$$

が成り立つことに注意すればよい.

(4) Φ が標準的実現であること.

$$\sum_{e \in E_0} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}(e))^2 = c\|\mathbf{x}\|^2 \quad (\mathbf{x} \in H) \quad (\text{A.4})$$

を確かめればよい (本文の定理 4.3). (A.4) は, 向き E_0° を選べば

$$\sum_{e \in E_0^\circ} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}(e))^2 = \frac{c}{2}\|\mathbf{x}\|^2 \quad (\mathbf{x} \in H)$$

と同値である ($\mathbf{v}(\bar{e}) = -\mathbf{v}(e)$ に注意). E_0° が $C_1(X_0, \mathbf{R})$ の正規直交基底

であること, および直交射影の性質 $Pz \cdot w = z \cdot Pw$ を使えば,

$$\sum_{e \in E_0^o} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}(e))^2 = \sum_{e \in E_0^o} (\mathbf{x} \cdot P(e))^2 = \sum_{e \in E_0^o} (\mathbf{x} \cdot e)^2 = \|\mathbf{x}\|^2$$

であるから, $c = 2$ として (A.4) が成り立つ.

読者には, 色々な結晶格子の標準的実現を今述べた方法で具体的に求めることを勧める (たとえば, d 次元ダイヤモンドをこの方法で再構成するのは, よい演習問題である).

例 A.4. 頂点の数が 4 の完全グラフ $X_0 = K_4$ の最大アーベル被覆 X は 3 次元結晶格子であるが (以下, これを K_4 格子とよぶ), これの標準的実現を構成してみよう.

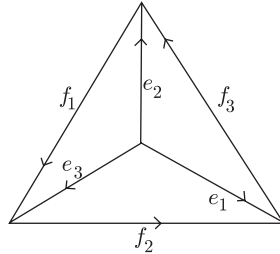


図 A.6 K_4

$X_0 = K_4$ とするとき, $H_1(X_0, \mathbf{Z})$ の \mathbf{Z} -基底として, 閉路

$$c_1 = (e_2, f_1, \bar{e}_3), \quad c_2 = (e_3, f_2, \bar{e}_1), \quad c_3 = (e_1, f_3, \bar{e}_2)$$

が取れる (図 A.6). $\|c_1\|^2 = \|c_2\|^2 = \|c_3\|^2 = 3$, $c_i \cdot c_j = -1$ ($i \neq j$) であることに注意. これは, 空間の中で $c_1 = \overrightarrow{OP_1}$, $c_2 = \overrightarrow{OP_2}$, $c_3 = \overrightarrow{OP_3}$ となるように点 O, P_1, P_2, P_3 を取れば, P_1, P_2, P_3 は O を重心とする正四面体の頂点になっていることを意味する (もう 1 つの頂点は, 閉路 $c_4 = (\bar{f}_3, \bar{f}_2, \bar{f}_1)$ に対応する; 例題 1.4). K_4 格子 X の素材を, 基底 c_1, c_2, c_3 を用いて表そう. このため $\mathbf{v}(e_1) = a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3$ ($a_i \in \mathbf{R}$) と表し,

$$\mathbf{v}(e_1) \cdot c_1 = e_1 \cdot c_1 = 0, \quad \mathbf{v}(e_1) \cdot c_2 = e_1 \cdot c_2 = -1, \quad \mathbf{v}(e_1) \cdot c_3 = e_1 \cdot c_3 = 1$$

であることを使えば,

$$\mathbf{v}(e_1) = -\frac{1}{4}c_2 + \frac{1}{4}c_3$$

が得られる. 同様に

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(e_2) &= \frac{1}{4}c_1 - \frac{1}{4}c_3, & \mathbf{v}(e_3) &= -\frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{4}c_2, \\ \mathbf{v}(f_1) &= \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{4}c_2 + \frac{1}{4}c_3, & \mathbf{v}(f_2) &= \frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{4}c_3, \end{aligned}$$

$$v(f_3) = \frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{4}c_2 + \frac{1}{2}c_3$$

が得られる．符号を除けば $v(e_1), v(e_2), v(e_3), v(f_1), v(f_2), v(f_3)$ は素材であるから，これらにより X の標準的実現は完全に決定される．

なお， X における最短の閉路の長さは 10 である．たとえば， $c = (e_1, f_3, \bar{e}_2, e_3, f_2, \bar{e}_1, e_2, \bar{f}_3, \bar{f}_2, \bar{e}_3)$ は X における閉路を被覆写像で X_0 に写したものになっている．実際， $H_1(X_0, \mathbf{Z})$ の要素として c は 0 に等しく，よって c の X へのリフトは閉じた路である．ダイヤモンド結晶が六角形の（いす形）立体配置から構成されているのに対し，実現された K_4 格子は 10 角形の立体配置から構成されている．

図 A.7 に，標準的に実現された K_4 格子（の一部）の図を掲げるが，実物は大きい対称性を持ち，ダイヤモンド結晶に劣らぬ美しさを持っていることを言い添えておこう．

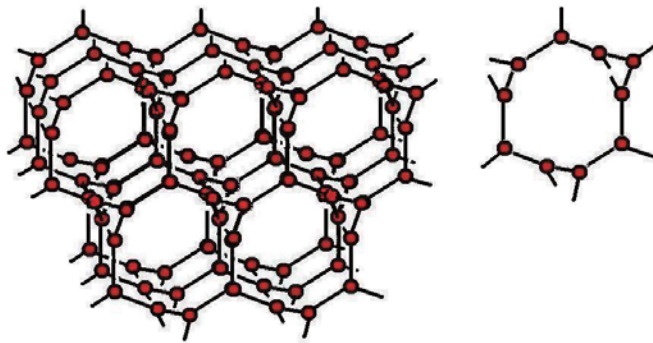


図 A.7 K_4 結晶

注意 A.3. (1) 本文の 2.6 節の問題 3 の後半で述べた性質（等質・等方性）を持つ非退化な 3 次元結晶格子は，ダイヤモンド格子か， K_4 格子のどちらかである．2 次元非退化結晶格子では，蜂の巣格子のみがこの性質を持つ．

(2) 標準的実現の一般的性質から， K_4 格子の標準的実現は合同変換を除いて一意的であるが，運動（回転と平行移動）で類別すると 2 種類ある．すなわち，鏡映を行って得られる実現は元の実現とは運動では重ならない¹⁰．一方，ダイヤモンド結晶の場合，その鏡映は元のダイヤモンド結晶と運動で重なる．

ついでに，標準的に実現された結晶格子に対する極限図形の表現も与えて

¹⁰ 物理用語では，キラリティ(chirality)を持つという．

おこう．向き E_0^o を選び， $\alpha = \sum_{e \in E_0^o} a_e e$ に対して，

$$\|\alpha\|_1 = \sum_{e \in E_0^o} |a_e|$$

とおいて， $H_1(X_0, \mathbf{R})$ のノルム $\|\cdot\|_1$ を定義する（これは向きの選び方にはよらない）．次に， H のノルム $\|\cdot\|_\infty$ を

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \inf\{\|\alpha\|_1; P(\alpha) = \mathbf{x}(\alpha \in H_1(X_0, \mathbf{R}))\}$$

とおいて定義する．このとき， $K = \{\mathbf{x} \in H; \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1\}$ が極限図形である．

X が X_0 の最大アーベル被覆の場合， X_0 のサイクルの全体を K_1, \dots, K_n とし，それらを閉路と見なして $H_1(X_0, \mathbf{Z})$ の要素と考えたものを $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ とする．このとき

$$\pm \frac{1}{\|\alpha_i\|_\infty} \alpha_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

が多面体 K の頂点となる．面についても特徴付けを与えることができるが，これについては省略する（[40] を見よ）．

K_4 格子に対して今述べたことを使うと，その極限図形は頂点の数が 14 個，辺の数が 36 個，面の数が 24 個の多面体であることがわかる（もう少し詳しく言えば，立方体の各面を底面として正四角錐を外側に貼り付けて得られる多面体である）．

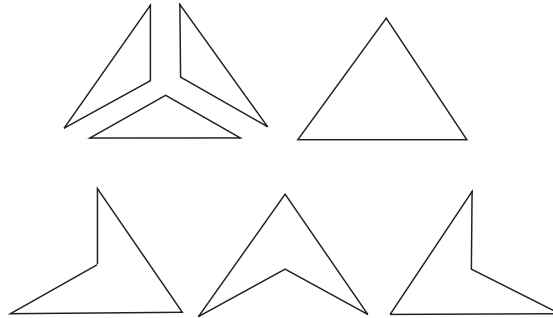


図 A.8 K_4 のサイクル

以下， X を非退化結晶格子とし， $L \subset \text{Aut}(X)$ を抽象的最大周期格子群とする．さらに X はある有限グラフ X_0 の最大アーベル被覆としよう． $H_1(X_0, \mathbf{Z})$ は X の抽象的周期格子群であるから $H_1(X_0, \mathbf{Z}) \subset L$ であるが，

一般には $H_1(X_0, \mathbf{Z}) = L$ とは限らない。 L に対する基本有限グラフを X'_0 とすると、 X'_0 の最大アーベル被覆 X' は X と一致する。 実際、被覆写像の列

$$X' \longrightarrow X \longrightarrow X_0 \longrightarrow X'_0$$

が存在し、 X' は X_0 のアーベル被覆であることから、 X の最大性により $X' = X$ が導かれる。 よって、 $L = H_1(X'_0, \mathbf{Z})$ が成り立つ。 すなわち、 X_0 の代わりに X'_0 を考えれば、最初から $L = H_1(X_0, \mathbf{Z})$ と仮定してもよいことになる。

$L = H_1(X_0, \mathbf{Z})$ の場合、被覆写像の理論を用いれば、準同型写像 $\pi : \text{Aut}(X) \longrightarrow \text{Aut}(X_0)$ は全射であることがわかる。 したがって、次の完全系列¹¹を得る。

$$0 \longrightarrow H_1(X_0, \mathbf{Z}) \longrightarrow \text{Aut}(X) \longrightarrow \text{Aut}(X_0) \longrightarrow 1.$$

d 次元ダイヤモンド格子とその基本有限グラフは、この性質を満たす結晶格子である。

ダイヤモンドはやはり美しい!

¹¹ 一般に、準同型 $i : H \longrightarrow G$, $p : H \longrightarrow K$ からなる列 $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow 1$ が完全系列とは、 i が単射、 p が全射、かつ $i(H) = \text{Ker } p$ が成り立つことである。

付録 B 問の答

第 1 章

問 1.1 (1) 位置ベクトルと点を同一視して考える. $\mathbf{0}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ が三角形の頂点をなすときは, $\mathbf{0}, \mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}$ も三角形の頂点をなすから, 三角形に対する三角不等式により $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| < \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$ である. $\mathbf{0}, \mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}$ が同一直線上にあるとき, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ であるか, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ のときは $\mathbf{b} = h\mathbf{a}$ であるような数 h が存在する. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ のときは, 明らかに $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$ であり, $1\mathbf{a} + 0\mathbf{b} = \mathbf{0}$ である. $\mathbf{b} = h\mathbf{a}$ のときは,

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} + h\mathbf{a}\| = |h + 1|\|\mathbf{a}\| \leq |h|\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$$

となり, 等号は $|h + 1| = |h| + 1$ のとき, すなわち $h \geq 0$ のときにのみ成り立つ. $h\mathbf{a} + (-1)\mathbf{b} = \mathbf{0}$ であるから主張が成り立つ.

(2) $\|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}\| \leq \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| + \|\mathbf{c}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{c}\|$. ここで等号が成り立てば, $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$ が成り立たなければならない. まったく同様に, $\|\mathbf{b} + \mathbf{c}\| = \|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{c}\|$, $\|\mathbf{a} + \mathbf{c}\| = \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{c}\|$ が成り立たなければならない. よって, (1) を使えば主張が得られる.

問 1.2 $3\pi/5 = 108^\circ, 72^\circ = 2\pi/5$.

問 1.3 条件から, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq -(1/2)\|\mathbf{a}\|^2$. よって $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq \|\mathbf{a}\|^2$. 両辺は正なので $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\|$.

問 1.4 (1) 平面上の 2 点 \mathbf{x}, \mathbf{y} に対して, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b, \mathbf{a} \cdot \mathbf{y} = b$ であるから, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$. これは, \mathbf{a} が平面に垂直であることを意味している. 後半は前半より明らか.

(2) \mathbf{x}_1 を平面 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b_1$ 上の点とし, \mathbf{x}_1 から平面 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b_2$ に下ろした垂線の足を \mathbf{x}_2 とする. 求めたいのは $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|$ である. スカラー k を用いて $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = k\mathbf{a}$ と表せるから,

$$b_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 + k\mathbf{a}) = b_1 + k\|\mathbf{a}\|^2$$

24 付録 B 問の答

が得られ, $k = (b_2 - b_1)/\|\mathbf{a}\|^2$ となる. こうして

$$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| = |k|\|\mathbf{a}\| = \frac{|b_2 - b_1|}{\|\mathbf{a}\|}.$$

(3) これは平面 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b$ と点 $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ の間の距離についての次の既知の公式を書き直したものである.

$$\frac{|a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 - b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

ただし, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ としている. 念のため, この公式を示しておこう. 不等式 $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$ を使えば

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}| = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})| \leq \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|$$

であるから, \mathbf{x} が平面 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b$ 上にあれば,

$$\frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} - b|}{\|\mathbf{a}\|} \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|$$

が得られる. 等号は, $\mathbf{x} - \mathbf{p} = c\mathbf{a}$ となるスカラー c が存在するとき, すなわち, $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ が平面に垂直なときに成り立つ.

問 1.5 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$ とする. ノルムの不等式 (本文の (1.1)) を使えば

$$\begin{aligned} AP + BP + CP &= \|\mathbf{a} - \mathbf{p}\| + \|\mathbf{b} - \mathbf{p}\| + \|\mathbf{c} - \mathbf{p}\| \\ &> \|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - 3\mathbf{p}\| \end{aligned}$$

が得られるが, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ であるから求める不等式が導かれる.

問 1.6 (1) $\mathbf{0} = x(3\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3) + y(3\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3) + z(3\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) = (3x - y - z)\mathbf{a}_1 + (-x + 3y - z)\mathbf{a}_2 + (-x - y + 3z)\mathbf{a}_3$ であるとき, $3x - y - z = 0 = -x + 3y - z = -x - y + 3z = 0$ であるから, この連立方程式を解いて $x = y = z = 0$ となる.

(2) P が重心であることから $\overrightarrow{DP} = (1/4)(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$ が成り立ち, これを

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DP}, \quad \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DP}, \quad \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DP}$$

に代入すれば

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} &= \frac{1}{4}(3\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}), \quad \overrightarrow{PB} = \frac{1}{4}(3\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}), \\ \overrightarrow{PC} &= \frac{1}{4}(3\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}) \end{aligned}$$

となるから, (1) によりこれらは 1 次独立である.

問 1.7 原点 O を $ABCD$ の重心に取り, A, B, C, D に対する位置ベクトルを

それぞれ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ により表す. 本文の例題 1.7 の解の中で示したように, $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{c}\| = \|\mathbf{d}\|$ であり, この共通の値を k とするとき,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} = -\frac{1}{3}k^2.$$

(1) $\overrightarrow{OM} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2, \overrightarrow{ON} = (\mathbf{c} + \mathbf{d})/2$ であるから $\overrightarrow{MN} = (1/2)(\mathbf{c} + \mathbf{d} - \mathbf{a} - \mathbf{b})$ となり,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} &= \frac{1}{4}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d} - \mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= \frac{1}{4}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} - \|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}\|^2) = 0. \end{aligned}$$

同様に, $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ が得られる.

(2) 面 ABC, ABD のなす 2 面角は $\angle CMD$ に等しい. よって

$$\left\| \mathbf{c} - \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \right\| \left\| \mathbf{d} - \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \right\| \cos \theta = \left(\mathbf{c} - \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \right) \cdot \left(\mathbf{d} - \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \right).$$

簡単な計算により

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{c} - \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \right\|^2 &= \left\| \mathbf{d} - \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \right\|^2 = 2k^2, \\ \left(\mathbf{c} - \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \right) \cdot \left(\mathbf{d} - \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \right) &= \frac{2}{3}k^2 \end{aligned}$$

を確かめることができるから, $\cos \theta = 1/3$ が得られる.

問 1.8 複素数を用いた証明を与える. $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}), \dots, \mathbf{a}_k = (a_{k1}, a_{k2}), \mathbf{n} = (n_1, n_2)$ とすると

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n})^2 + \dots + (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{n})^2 &= (a_{11}n_1 + a_{12}n_2)^2 + \dots + (a_{k1}n_1 + a_{k2}n_2)^2 \\ &= (a_{11}^2 + \dots + a_{k1}^2)n_1^2 + 2(a_{11}a_{12} + \dots + a_{k1}a_{k2})n_1n_2 \\ &\quad + (a_{12}^2 + \dots + a_{k2}^2)n_2^2. \end{aligned}$$

これが, $n_1^2 + n_2^2 = 1$ を満たす n_1, n_2 に対して一定であるための条件は,

$$a_{11}^2 + \dots + a_{k1}^2 = a_{12}^2 + \dots + a_{k2}^2, \quad a_{11}a_{12} + \dots + a_{k1}a_{k2} = 0 \quad (\text{B.1})$$

となることである. そこで, 虚数単位 $\sqrt{-1}$ を用いて, \mathbf{a}_i に複素数 $z_i = a_{i1} + a_{i2}\sqrt{-1}$ を対応させる. すると $z_i^2 = a_{i1}^2 - a_{i2}^2 + 2a_{i1}a_{i2}\sqrt{-1}$ であるから, 条件 (B.1) は

$$z_1^2 + \dots + z_k^2 = 0$$

と同値であることがわかる. 問の条件から, 複素数平面上で z_1, \dots, z_k が単位円 $\{z; |z| = 1\}$ に内接する正多角形の頂点になっているので,

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{k} + \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi}{k}$$

により定められる複素数 ω を用いて, $z_i = \omega^{i-1} z_1$ ($i = 1, \dots, k$) と表せるとしてよい (必要ならば z_1, \dots, z_k の順序を入れ替える). 実際, これはド・モアブルの定理の帰結である ($z \mapsto \omega z$ は角度 $2\pi/k$ の回転である). $z_1^2 + \dots + z_k^2 = z_1^2(1 + \omega^2 + \omega^4 + \dots + \omega^{2k-2})$ に注意すれば, 示すべきことは $1 + \omega^2 + \omega^4 + \dots + \omega^{2k-2} = 0$ である. そこで $w = 1 + \omega^2 + \omega^4 + \dots + \omega^{2k-2}$ とおくと

$$\begin{aligned} \omega w + w &= \omega + \omega^3 + \dots + \omega^{2k-1} + 1 + \omega^2 + \omega^4 + \dots + \omega^{2k-2} \\ &= 1 + \omega + \dots + \omega^{k-1} + \omega^k(1 + \omega + \dots + \omega^{k-1}). \end{aligned}$$

ところが, 再びド・モアブルの定理により $\omega^k = 1$ であることが導かれ, $\omega \neq 1$ および $\omega^k - 1 = (\omega - 1)(\omega^{k-1} + \dots + \omega + 1)$ であることから, $\omega^{k-1} + \dots + \omega + 1 = 0$ である. よって, $(1 + \omega)w = 0$ が得られ, $\omega \neq -1$ であるから $w = 0$ が得られる.

$(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n})^2 + \dots + (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{n})^2$ は単位ベクトル \mathbf{n} に関して一定であることがわかったから, \mathbf{n}^\perp を \mathbf{n} に垂直な単位ベクトルとすると, $(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n})^2 + \dots + (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{n})^2 = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n}^\perp)^2 + \dots + (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{n}^\perp)^2$ が成り立つ. 一方, $\mathbf{a}_i = (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{n}^\perp)\mathbf{n}^\perp$ であるから, $\|\mathbf{a}_i\|^2 = (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{n})^2 + (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{n}^\perp)^2$ が成り立ち,

$$(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n})^2 + \dots + (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{n})^2 + (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n}^\perp)^2 + \dots + (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{n}^\perp)^2 = \|\mathbf{a}_1\|^2 + \dots + \|\mathbf{a}_k\|^2 = k$$

となる. こうして, $(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n})^2 + \dots + (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{n})^2 = k/2$ が成り立つ.

問 1.9 (1) L の \mathbf{Z} -基底 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ を取る.

$$\mathbf{a}_1 = m_{11}\mathbf{b}_1 + m_{21}\mathbf{b}_2, \quad \mathbf{a}_2 = m_{12}\mathbf{b}_1 + m_{22}\mathbf{b}_2$$

を満たす整数 m_{ij} が存在するから, これを $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ について解けば

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \frac{m_{22}}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}}\mathbf{a}_1 - \frac{m_{21}}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}}\mathbf{a}_2, \\ \mathbf{b}_2 &= -\frac{m_{12}}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}}\mathbf{a}_1 + \frac{m_{11}}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}}\mathbf{a}_2 \end{aligned}$$

となる. $\mathbf{x} \in L$ であるとき, 整数 y_1, y_2 により $\mathbf{x} = y_1\mathbf{b}_1 + y_2\mathbf{b}_2$ と表されることを使って, これに今求めた式を代入すれば主張が得られる.

(2) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ を L_1 の \mathbf{Z} -基底とし, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ を L_2 の \mathbf{Z} -基底とする. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は L_2 に属す 1 次独立なベクトルであるから, (1) により

$$\mathbf{b}_1 = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2, \quad \mathbf{b}_2 = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2$$

となる有理数 x_1, x_2, y_1, y_2 が存在する. nx_1, nx_2, ny_1, ny_2 がすべて整数となる自然数 n を取ると, $n\mathbf{b}_1, n\mathbf{b}_2$ は L_1 に属す. よって, 任意の $\mathbf{x} \in L_2$ に対して, $\mathbf{x} = n_1\mathbf{b}_1 + n_2\mathbf{b}_2$ と表せばわかるように (n_1, n_2 は整数), $n\mathbf{x}$ は L_1 に属すことがわかる.

問 1.10 $\mathbf{x} \in L$ に対して, $\mathbf{x} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$ と表す.

x, y が整数であることを示せばよい. $\mathbf{x} = \mathbf{a}, \mathbf{b}$ のときは明らかだから, $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}, \mathbf{b}$ と

する. $m \leq x < m+1, n \leq y < n+1$ となる整数 m, n を選び, $\mathbf{y} = \mathbf{x} - m\mathbf{a} - n\mathbf{b}$, $x' = x - m, y' = y - n$ とおくと, $0 \leq x', y' < 1$ であり, $\mathbf{y} = x'\mathbf{a} + y'\mathbf{b}$ は L の要素である. $y' \leq x'$ としよう. ノルムに関する三角不等式により

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| = \|(x' - 1)\mathbf{a} + y'\mathbf{b}\| \leq (1 - x' + y')\|\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{a}\|$$

が成り立つ. $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ のときは主張は正しい. $\mathbf{y} \neq \mathbf{a}$ のときは条件 (2) により $\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$ が成り立つ. よって等式 $\|(x' - 1)\mathbf{a} + y'\mathbf{b}\| = (1 - x' + y')\|\mathbf{a}\|$ が得られるが, これが成り立つためには $x' - 1 = 0$ あるいは $y' = 0$ でなければならない (三角不等式の等号条件; 本文の問 1.1). $x' < 1$ であるから, $y' = 0$ であり, このとき $\|\mathbf{a}\| = (1 - x')\|\mathbf{a}\|$ となって $x' = 0$ が示される. よって, $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ より $\mathbf{x} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$ となる. $x' \leq y'$ のときも同様である.

問 1.11 平行六面体の底面を選び, その面積を S とするとき, 四面体の底面の面積 S_1 は $(1/2)S$ である. 高さ h は平行六面体と四面体とで共通であるから (図 B.1),

$$V_1 = \frac{1}{3}hS_1 = \frac{1}{6}hS = \frac{1}{6}V.$$

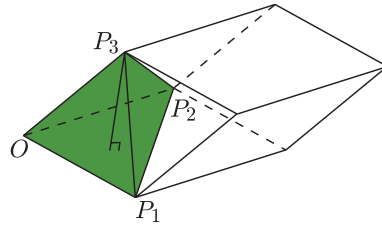


図 B.1 基本平行六面体の体積

問 1.12 $x_1 + x_2 + x_3 = 2k$ とするとき, 次式が成り立つことに注意すればよい.

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = k(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + (k - x_2)(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) - x_3(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3).$$

問 1.13 $\|\mathbf{a}_1\|^2 = \|\mathbf{a}_2\|^2 = \|\mathbf{a}_3\|^2 = 2, \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\|^2 = \|\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3\|^2 = \|\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1\|^2 = 2$ から導かれる.

問 1.14 6つの点は平面 $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ 上にある (図 B.2).

問 1.15 OA_1A_2 は正三角形であり, P はその重心となっている.

問 1.16 $p = (x_1, x_2, x_3), q = (y_1 + (1/2), y_2 + (1/2), y_3 + (1/2))$ とするとき

$$\vec{pq} = \left(y_1 - x_1 + \frac{1}{2}, y_2 - x_2 + \frac{1}{2}, y_3 - x_3 + \frac{1}{2} \right).$$

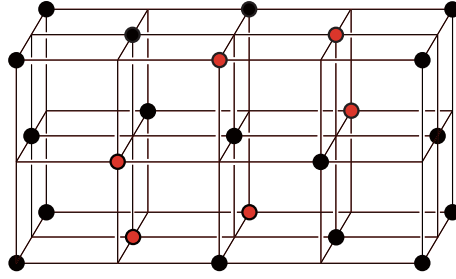


図 B.2 同一平面上の6つの点

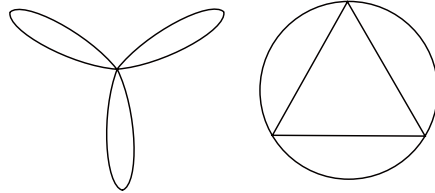


図 B.3 三角格子とカゴメ格子の基本有限グラフ

問 1.17 基本有限グラフは図 B.3 により与えられる .

問 1.18 図 B.4 のように, 頂点は7種類に分類され, さらに2つの頂点は常に辺で結ばれる . すなわち, 基本有限グラフは7つの頂点を持ち, 任意の2つの頂点が辺で結ばれているようなグラフである¹ .

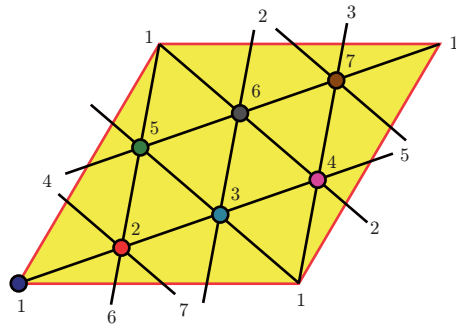


図 B.4 基本有限グラフ

¹ これは完全グラフ K_7 である (本文 2.5 節参照) .

問 1.19
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$
 よって $|\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)| = 2.$

問 1.20 図 B.5 を見よ .

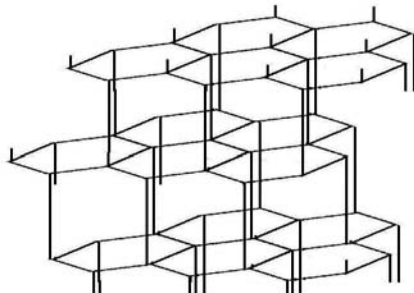


図 B.5 グラファイト型のダイヤモンド格子の実現

第 2 章

問 2.1 仮定から, $S^k(\mathbf{x}) = S^h(\mathbf{x})$ を満たす $h < k$ が存在する . $n = k - h$ とおけば $S^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ が成り立つから, 回転の性質により $S^n = I$ が得られる .

問 2.2 (1) 平行な直線 l_1, l_2 の方程式をそれぞれ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b_1, \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b_2$ とする . 本文の例題 2.1 の式 (2.1) を使えば ,

$$\begin{aligned} T_2 T_1 \mathbf{z} &= T_1 \mathbf{z} - \frac{2}{\|\mathbf{a}\|^2} (T_1 \mathbf{z} \cdot \mathbf{a} - b_2) \mathbf{a} \\ &= \mathbf{z} - \frac{2}{\|\mathbf{a}\|^2} (\mathbf{z} \cdot \mathbf{a} - b_1) \mathbf{a} - \frac{2}{\|\mathbf{a}\|^2} \left(\mathbf{a} \cdot \mathbf{z} - \frac{2}{\|\mathbf{a}\|^2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{z} - b_1) \|\mathbf{a}\|^2 - b_2 \right) \mathbf{a} \\ &= \mathbf{z} + \frac{2(b_2 - b_1)}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} \end{aligned}$$

を得る . 問 1.4 (の解) から , 主張が成り立つことがわかる .

(2) l_1, l_2 の交点は原点としてよい . このとき , l_1, l_2 の方程式はそれぞれ $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} = 0, \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x} = 0$ と表され , $\|\mathbf{a}_1\| = \|\mathbf{a}_2\| = 1$ と仮定してよい . $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ のなす角を θ とすると , $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \cos \theta$ である .

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{e}_2 = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \mathbf{a}_1 + \frac{1}{\sin \theta} \mathbf{a}_2$$

とおくと , $\|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = 1, \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ であることが容易に確かめられる . そこで , $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を基本ベクトルとするような座標系を取る (すなわち , $\mathbf{z} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ とする

とき, 点 \mathbf{z} の座標は (x, y) である).

$$\begin{aligned} T_2 T_1 \mathbf{z} &= T_1 \mathbf{z} - 2(\mathbf{a}_2 \cdot T_1 \mathbf{z}) \mathbf{a}_2 \\ &= \mathbf{z} - 2(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{z}) \mathbf{a}_1 - 2(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{z}) \mathbf{a}_2 + 4(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{z})(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) \mathbf{a}_2 \end{aligned}$$

であるから, これに $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \cos \theta$ および $\mathbf{a}_2 = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$, $\mathbf{z} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2$ を代入すれば, 三角関数の 2 倍角の公式により

$$\begin{aligned} T_2 T_1 \mathbf{z} &= x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 - 2x \mathbf{e}_1 - 2(x \cos \theta + y \sin \theta)(\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2) \\ &\quad + 4x \cos \theta (\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2) \\ &= ((2 \cos^2 \theta - 1)x - 2y \sin \theta \cos \theta) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + ((1 - 2 \sin^2 \theta)y + 2x \sin \theta \cos \theta) \mathbf{e}_2 \\ &= (x \cos 2\theta - y \sin 2\theta) \mathbf{e}_1 + (x \sin 2\theta + y \cos 2\theta) \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

が得られる. これは, $T_2 T_1$ が角 2θ の回転であることを意味している.

問 2.3 点を位置ベクトルで表し, P_i に対する位置ベクトルを \mathbf{p}_i とする. このとき $T_i \mathbf{x} = -(\mathbf{x} - \mathbf{p}_i) + \mathbf{p}_i = -\mathbf{x} + 2\mathbf{p}_i$ であるから

$$T_2 T_1 \mathbf{x} = -T_1 \mathbf{x} + 2\mathbf{p}_2 = -(-\mathbf{x} + 2\mathbf{p}_1) + 2\mathbf{p}_2 = \mathbf{x} + 2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1).$$

問 2.4 (1) $2 \cos a\pi$ が有理数であり, $2 \cos a\pi \neq 0, \pm 1, \pm 2$ とするとき, a が有理数とはなり得ないことを証明すればよい. 背理法によりこれを示すため, a を有理数としよう. $z = \cos a\pi + \sqrt{-1} \sin a\pi$ とおく. ド・モアブルの定理により, $z^n = 1$ となる自然数 n が存在する ($na \in 2\mathbf{Z}$ となるように n を取ればよい). さらに仮定から $z \neq \pm 1$ であり, $2 \cos a\pi$ は整数とは異なる有理数である. そこで $2 \cos a\pi$ を既約分数 p/q により表す. a_k, b_k を

$$z^k = a_k z + b_k \quad (k \geq 2)$$

により定めよう ($1, z$ は \mathbf{R} 上 1 次独立であるから, a_k, b_k は一意に定まる). 再びド・モアブルの定理により

$$\begin{aligned} z^2 &= \cos 2a\pi + \sqrt{-1} \sin 2a\pi = 2 \cos^2 a\pi - 1 + 2\sqrt{-1} \sin a\pi \cos a\pi \\ &= 2 \cos a\pi (\cos a\pi + \sqrt{-1} \sin a\pi) - 1 = 2(\cos a\pi)z - 1 \end{aligned}$$

であるから, $a_2 = 2 \cos a\pi = p/q$, $b_2 = -1$.

$$z^{k+1} = z(a_k z + b_k) = a_k \left(\frac{p}{q} z - 1 \right) + b_k z = \frac{a_k p + q b_k}{q} z - a_k$$

により

$$a_{k+1} = \frac{a_k p + q b_k}{q}, \quad b_{k+1} = -a_k.$$

これを使って, q と互いに素な整数 f_k ($k \geq 2$) により $a_k = f_k/q^{k-1}$ と表されるこ

とを帰納法で確かめる． $k = 2$ に対しては $f_2 = p$ として成り立つ． k に対して正しいと仮定する．このとき $f_{k+1} = pf_k - q^2 f_{k-2}$ とおけば， $a_{k+1} = f_{k+1}/q^k$ となるが，明らかに f_{k+1} は q と互いに素である．

さて， $z^{n+1} = z$ であるから， $1 = a_{n+1} = f_{n+1}/q^n$ でなければならないが，これは f_{n+1} と q が互いに素であることと矛盾する．こうして a が有理数とはなり得ないことが証明された．

後半の主張は前半から明らかである．

(2) 0 と異なる L の格子ベクトル a で $\|a\|$ が最小となるものを取る． T についての仮定から， a, Ta は 1 次独立であり， $\|a\| = \|Ta\|$ ．よって，問 1.10 により a, b は L の \mathbb{Z} -基底である．特に $T^2 a = xa + yTa$ となる整数 x, y が (一意に) 存在する．さらに， $T^n a = a$ となる自然数 $n \geq 2$ が存在する (もしそうでないならば，円周上に無限個の格子点が存在することになって矛盾；問 2.1 の解参照)． $\|a\| = 1$ と仮定しても一般性を失わないことに注意．ここで，平面を複素数平面と同一視する．必要なら回転を行うことにより a を $1 = 1 + 0\sqrt{-1}$ と同一視してよい． $Ta = z = \cos a\pi + \sqrt{-1} \sin a\pi$ とすると，ド・モアブルの定理により， $T^k a$ は z^k に対応するから， $z^n = 1$ により a は有理数でなければならない．さらに， $z^2 = x + yz$ に注意して $z^2 = 2(\cos a\pi)z - 1$ であることを使えば， $2 \cos a\pi$ が有理数 (整数) であることが導かれる．よって，(1) の結果から $a = 0, 1, 1/2, 1/3, 2/3$ が結論されるが，仮定から $a = 0, 1$ は除外され， T は $90^\circ, 60^\circ$ あるいは 120° を回転角とする回転になり，それぞれに応じて $T^4 = I, T^6 = I, T^3 = I$ となる．

次に， L が正方格子あるいは蜂の巣格子の最大周期格子群となることを示そう． $b = Ta$ とおく． $T^4 = I$ の場合は， $a \cdot b = 0$ であるから， L は正方格子の最大周期格子群であり， $T^6 = I$ のときは， $a \cdot b = (-1/3)\|a\|\|b\|$ であるから a, b は蜂の巣の最大周期格子群の \mathbb{Z} -基底となる． $T^3 = I$ のときは $a, a + b$ が蜂の巣の最大周期格子群の \mathbb{Z} -基底となる (a, b も \mathbb{Z} -基底である)．

問 2.5 一般に $|A|$ により集合 A の要素の個数を表すとき，本文の式 (2.2) により $|E| = \sum_{x \in V} |E_x|$ が成り立つ．あとは $|E| = 2N$ ， $|E_x| = d(x)$ であることを使えばよい．

問 2.6 $\psi: E_x \rightarrow E_{0\varphi(x)}$ は全単射であるから， $\psi(f_1) = e_1$ を満たす $f_1 \in E_x$ がただ 1 つ存在する． $\varphi(t(f_1)) = t(\psi(f_1)) = t(e_1) = o(e_2)$ であるから， $\psi(f_2) = e_2$ を満たす $f_2 \in E_{t(e_1)}$ がただ 1 つ存在する．この操作を続ければよい (正確には帰納法を使う)．

問 2.7 図 B.6 を見よ．

問 2.8 存在しない．存在すれば，各面の境界に現れる稜の数 (6) を面上足し合わせて $6f = 2e$ が得られる (稜は 2 回数えられる)．さらに，各頂点に集まる稜の数を頂点上足し合わせると $2e$ になることと (やはり稜は 2 回数えられる)，各頂点に

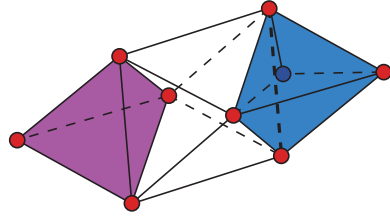


図 B.6 菱面体の分割

は 3 本以上の稜が集まることに注意すれば, 不等式 $3v \leq 2e$ が得られる. $f = e/3$ を $2 = v - e + f$ に代入すれば, $2 = (1/3)(3v - 2e) \leq 0$ となるから矛盾である.

問 2.9 ある 1 つのタイルの頂点 p が別のタイルの辺 (の内部) 上にある場合は, タイルの内角は 90 度か 60 度のいずれか, すなわち正方形か正三角形である. 実際, p にはそれを頂点とする 2 つ以上のタイルが集まり, よって内角は 90 度以下となるからである.

どのタイルの頂点も別のタイルの辺上にはない場合, タイルが g 角形で, 頂点が集まる点でのタイルの数を d とすると, タイルの内角は $((g-2)/g)\pi$ であるから (対角線を引いて $g-2$ 個の三角形に分割すれば, 内角の総和は $(g-2)\pi$ であることがわかる), $d((g-2)/g)\pi = 2\pi$ が成り立つ. よって $g = (2d)/(d-2)$ であり, $g \geq 3$ であるから, $d \leq 6$ が導かれる. g が自然数であるから $d = 5$ は除外され, $(d, g) = (3, 6), (4, 4), (6, 3)$ を得る. こうして, 正三角形, 正方形, 正六角形が答となる.

問 2.10 $a \circ b = a + b + 2ab$ に対しては, $(a \circ b) \circ c = a + b + c + 2(ab + bc + ca) + 4abc = a \circ (b \circ c)$ が成り立つ. $a \circ b = 2(a + b) + ab$ に対しては, $(a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c) = 2a - 2c$ である.

問 2.11 $(3, 1, 4, 2)(4, 1, 3, 2) = (2, 3, 4, 1), (2, 1, 4, 3)^{-1} = (2, 1, 4, 3)$.

問 2.12 (1) H, K が $G = \text{Aut}(X)$ の部分群であることは容易に確かめられる. $H \cap K = \{1\}$ であることも明らか. H が正規部分群であることを見るために, $h \in H, g \in G$ とする. h は頂点を動かさないから $ghg^{-1}(x) = gg^{-1}(x) = x$, $ghg^{-1}(y) = gg^{-1}(y) = y$ となり, ghg^{-1} も頂点を動かさない. よって ghg^{-1} は辺の置換であり, $ghg^{-1} \in H$ となる. K が正規部分群であることも, $k \neq 1 \in K$ であれば gkg^{-1} は x, y を交換し, 無向辺は固定するからわかる. $hk = kh$ ($h \in H, k \in K$) であることは, $k \neq 1$ のとき両辺とも無向辺としては同じ置換を引き起こし, しかもすべての辺の向きを逆にするから導かれる.

(2) $g \in G$ に対して, $g = hk$ ($h \in H, k \in K$) と表されることを示す. $g(x) = x$, $g(y) = y$ のときは $g \in H$ であり, $g = g1$ ($g \in H, 1 \in K$) と表されるから主張は

正しい. $g(x) = y$ のときは, $k(x) = y$ となる $k \in K$ を取ると, gk^{-1} は頂点を動かさないから, $gk^{-1} \in H$ となり, $h = gk^{-1}$ とおけば $g = hk$ となる.

(3) $(h, k) \mapsto hk$ は $H \times K$ から G への同型写像となる.

問 2.13 図 B.7 を見よ (2 種類の実現を与えている).

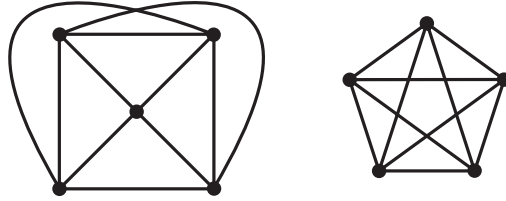


図 B.7 K_5

問 2.14 図 B.8 から明らか.

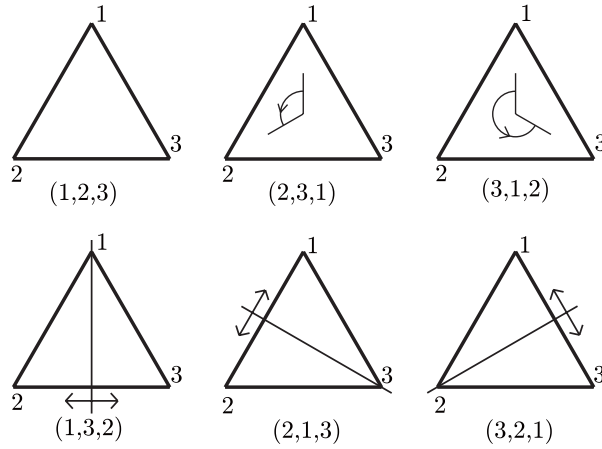


図 B.8 正三角形の対称性

問 2.15 図 B.9 のような, 頂点 p を始点とする辺 e_1, e_2, e_3, e_4 のうち, e_1, e_2, e_3 を含むダイヤモンド格子の部分グラフを考える (部分グラフの定義については, 本文の第 2 章の補遺 2.7.2 節参照). 証明すべきは, 蜂の巣格子と同様に, ダイヤモンド格子の自己同型写像 U が $U(p) = p$ および $U(e_i) = e_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) を満たせば, U は恒等写像となることである. 右側の図のような, 部分グラフの中にある六角

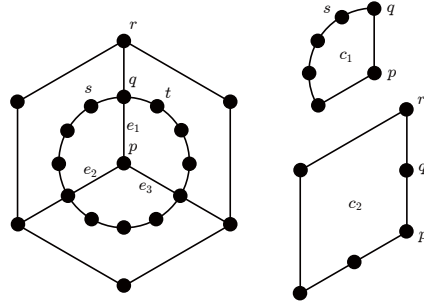


図 B.9 ダイヤモンド格子の部分グラフ

形 c_1, c_2 を取ると, $g_0(c_1), g_0(c_2)$ も e_1, e_2 を含む六角形であるから, U は c_1, c_2 の双方を固定するか, それらを交換するかのどちらかである. しかし, 後者の場合は起きない. なぜなら, もし交換すれば, $U(p) = p$ であることから, $g_0(r) = s$ かつ $g_0(s) = r$ が成り立ち, $g_0(t) = t$ となる. これは, e_1, e_3 を含む六角形が U によって固定されることを意味するから, $U(r) = r$ となって矛盾が生じる. 今示したことから, 頂点 p, q, r, s (よって, q を端点とする 4 つの辺) は U によって固定される. これを続ければ, U が恒等写像であることがわかる.

第 3 章

問 3.1 $f(x) = (x - a_1)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$ とおいて, x に関して微分すれば

$$f'(x) = 2(x - a_1) + \cdots + 2(x - a_n) = 2(nx - a_1 - \cdots - a_n)$$

となることから明らか.

問 3.2

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|x - \mathbf{a}_i\|^2 &= n\|x\|^2 - 2x \cdot \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \right) + \sum_{i=1}^n \|\mathbf{a}_i\|^2 \\ &= n\left\|x - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i\right\|^2 + \sum_{i=1}^n \|\mathbf{a}_i\|^2 - \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \right\|^2. \end{aligned}$$

他方で

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j\|^2 &= \sum_{i,j=1}^n \|\mathbf{a}_i\|^2 + \sum_{i,j=1}^n \|\mathbf{a}_j\|^2 - 2 \sum_{i,j=1}^n \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \\ &= 2n \sum_{i=1}^n \|\mathbf{a}_i\|^2 - 2 \left\| \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \right\|^2 \end{aligned}$$

となるから次式が得られ, これから主張が示される.

$$\sum_{i=1}^n \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|^2 = n \left\| \mathbf{x} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \right\|^2 + \frac{1}{2n} \sum_{i,j=1}^n \|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j\|^2.$$

問 3.3 (1) 直線 ℓ は $\mathbf{x} + t\mathbf{n}$ ($t \in \mathbf{R}$) のように表すことができる. ここで \mathbf{n} は単位ベクトルであり, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = 0$ とする. P の位置ベクトルを \mathbf{p} として, P から ℓ に下ろした垂線の足の位置ベクトルを $\mathbf{z} = \mathbf{x} + t\mathbf{n}$ とするとき, $0 = (\mathbf{p} - \mathbf{z}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} - t$ であるから, $\mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ を得る (図 B.10). よって

$$\begin{aligned} d(\ell, P)^2 &= \|\mathbf{p} - \mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{p}\|^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{z} + \|\mathbf{z}\|^2 \\ &= \|\mathbf{p}\|^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - 2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})^2 + \|\mathbf{x}\|^2 + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})^2 \\ &= \|\mathbf{p}\|^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})^2 + \|\mathbf{x}\|^2. \end{aligned}$$

P_1, \dots, P_n の重心を原点に取れば,

$$\sum_{i=1}^n d(\ell, P_i)^2 = \sum_{i=1}^n \|\mathbf{p}_i\|^2 - \sum_{i=1}^n (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n})^2 + n\|\mathbf{x}\|^2.$$

この式から, $f(\ell)$ が最小値であれば $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ であることが導かれる. よって, ℓ は重心を通る.

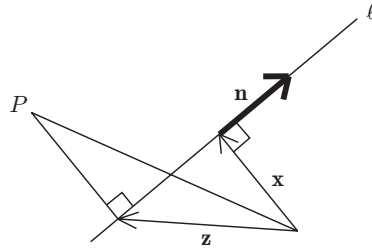


図 B.10 直線

(2) と (3) を解くには, $\sum_{i=1}^n (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n})^2$ が単位ベクトル \mathbf{n} に依存せず一定という条件を考察すればよい. 本文の定理 1.3 により, (2) の場合は正三角形, (3) の場合は正四面体であることがわかる.

問 3.4

$$f(x) = \begin{cases} -3x + a + b + c & (x \leq a) \\ -x + b + c - a & (a \leq x \leq b) \\ x + c - a - b & (b \leq x \leq c) \\ 3x - a - b - c & (x \geq c) \end{cases}$$

よって、関数 $f(x)$ のグラフは図 B.11 により与えられ、 $f(x)$ は $x = b$ で最小値 $c - a$ を取ることがわかる。

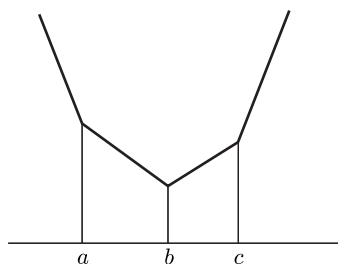


図 B.11 関数 $f(x)$ のグラフ

問 3.5 (1) の場合を考える。△ABC の内角の中で、60 度以上のものがあるから、それを $\angle A$ とする。AB, AC を弦とする円周を適切に取ることにより (図 B.12), その交点として $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$ となる点 P を求める (作図する) ことができる (図 B.12 の左側の図を参照)。

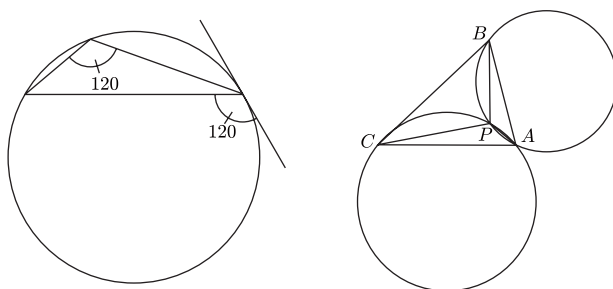


図 B.12 点 P の求め方

$Q \neq P$ としよう。 P を中心として、 B, C, Q を次のように回転する (図 B.13)。

- (i) B, Q を 240 度回転させて得られる点を、それぞれ B', Q' とする。
- (ii) C, Q を 120 度回転させて得られる点を、それぞれ C', Q'' とする。

この結果、 B', C' は P を始点とし A を通る半直線上にあり、三角形 $QQ'Q''$ は重心を P とする正三角形となる。特に、 $\vec{PQ} + \vec{PQ'} + \vec{PQ''} = \mathbf{0}$ が成り立つ。

さらに、 $BQ = B'Q', CQ = C'Q''$ であるから、トルムの三角不等式を使うことにより

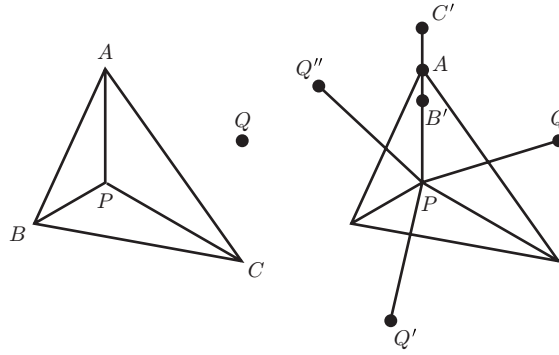
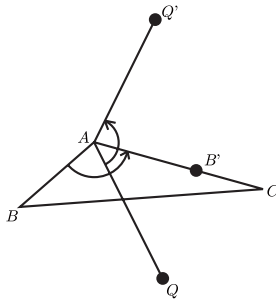


図 B.13 回転する

$$\begin{aligned}
 AQ + BQ + CQ &= AQ + B'Q' + C'Q'' \\
 &= \|\vec{PA} - \vec{PQ}\| + \|\vec{PB'} - \vec{PQ'}\| + \|\vec{PC'} - \vec{PQ''}\| \\
 &> \|\vec{PA} + \vec{PB'} + \vec{PC'} - \vec{PQ} - \vec{PQ'} - \vec{PQ''}\| \\
 &= \|\vec{PA} + \vec{PB'} + \vec{PC'}\| = \|\vec{PA}\| + \|\vec{PB'}\| + \|\vec{PC'}\| \\
 &= AP + BP + CP.
 \end{aligned}$$

次に (2) の場合を考察する． $\angle A \geq 120^\circ$ である A を中心として，半直線 AB を回転させて半直線 AC に重なるようにする．この回転で $Q \neq A$ が Q' に移るとし，さらに半直線 AC 上の点 B' を， $AB = AB'$ となるように取る (図 B.14)．

図 B.14 $\angle A \geq 120^\circ$ の場合

$\angle QAQ' = \angle A \geq 120^\circ$, $AQ = AQ'$ であるから，

$$\|\vec{AQ} + \vec{AQ}'\| \leq \|\vec{AQ}\|$$

である (問 1.3). よって, 求める不等式は次のようにして得られる.

$$\begin{aligned} AQ + BQ + CQ &= AQ + B'Q' + CQ \\ &= \|\vec{AQ}\| + \|\vec{AB}' - \vec{AQ}'\| + \|\vec{AC} - \vec{AQ}\| \\ &\geq \|\vec{AQ} + \vec{AQ}'\| + \|\vec{AB}' - \vec{AQ}'\| + \|\vec{AC} - \vec{AQ}\| \\ &> \|\vec{AQ} + \vec{AQ}' + \vec{AB}' - \vec{AQ}' + \vec{AC} - \vec{AQ}\| \\ &= \|\vec{AB}' + \vec{AC}\| = \|\vec{AB}'\| + \|\vec{AC}\| = AB + AC. \end{aligned}$$

問 3.6 辺の長さを a, b, c とし, $s = (a + b + c)/2 = \ell/2$ とする. ヘロンの公式 $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ および相加平均と相乗平均の不等式

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{1}{3}(s-a+s-b+s-c)\right)^3 = 3^{-3}s^3$$

を使えば,

$$S^2 \leq \frac{1}{3^3}s^4 = \frac{1}{2^4 3^3}\ell^4.$$

等号が成り立つのは, $s-a = s-b = s-c$, すなわち $a = b = c$ のときである.

問 3.7 (1) $OP_1 = a, OP_2 = b, \angle P_1OP_2 = \theta$ とおけば, $S = ab \sin \theta$ であるから,

$$OP_1^2 + OP_2^2 - 2S = a^2 + b^2 - 2ab \sin \theta = (a - b \sin \theta)^2 + b^2 \cos^2 \theta \geq 0$$

となって, 求める不等式を得る. 等号についての主張 ($\theta = \pi/2, a = b$) も明らかである (相加平均と相乗平均の不等式からも導かれる).

(2) $OP_1 = a, OP_2 = b, OP_3 = c, \angle P_1OP_2 = \theta$ とおき, さらに α を OP_3 と平面 OP_1P_2 のなす角とする. このとき, $V = abc \sin \theta \sin \alpha$ であるから, 相加平均と相乗平均の不等式により

$$\begin{aligned} OP_1^2 + OP_2^2 + OP_3^2 - 3V^{2/3} &= a^2 + b^2 + c^2 - 3(abc \sin \theta \sin \alpha)^{2/3} \\ &\geq a^2 + b^2 + c^2 - 3(abc)^{2/3} \geq 0 \end{aligned}$$

を得る. 等号は $a = b = c, \sin \theta = \sin \alpha = 1$ の場合にのみ成り立つ.

問 3.8 正三角格子と正カゴメ格子 (の最大周期格子) に対する素材は, それぞれ図 B.15 のようになる (左側の図が正三角格子, 右側の図が正カゴメ格子の場合). いずれの場合も, 2 つの正三角形に対するそれぞれの重心から頂点への有向線分が定めるベクトルからなる (正カゴメ格子の場合は, 同じベクトルが 2 回現れる). このことから, 定理 1.3 を使えば, $\sum_{e \in E_0} (\mathbf{v}(e) \cdot \mathbf{n})^2$ は単位ベクトル \mathbf{n} によらず一定の値を取ることがわかる. よって, 正三角格子と正カゴメ格子は標準的実現である.

問 3.9 図 B.16 を見よ.

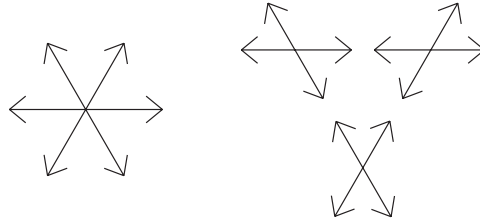


図 B.15 正三角格子と正カゴメ格子の素材

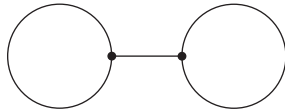


図 B.16 基本有限グラフ

第 4 章

問 4.1 図 B.17 を見よ .

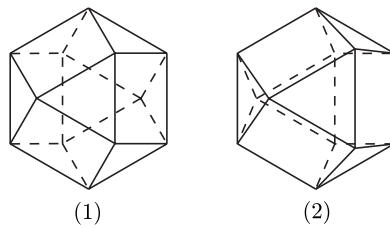


図 B.17 球の接吻

問 4.2 本文の例題 4.1 を使う . $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2 \leq \|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{b}\|^2 = (\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2$. 等号は , $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$ のときのみ成り立つ . 例題 4.1 の等号の場合の主張により , $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$ が成り立てば $h\mathbf{a} + k\mathbf{b} = \mathbf{0}$ となる同時には 0 ではない h, k が存在する . $hk \leq 0$ のときは主張そのものである . $0 = h\|\mathbf{a}\|^2 + k\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = h\|\mathbf{a}\|^2 + k\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$ であるから , $hk > 0$ の場合は $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 0$ であり , $1\mathbf{a} + (-1)\mathbf{b} = \mathbf{0}$ となって正しい . 逆に , $hk \leq 0$ を満たす同時には 0 でない h, k により $h\mathbf{a} + k\mathbf{b} = \mathbf{0}$ が成り立てば , $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$ が成り立つことは明らか .

問 4.3 内積の類似として

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

とおき, 2 次式 $(tf + g) \cdot (tf + g)$ を考えれば, 証明は本文の例題 4.1 とまったく同様である.

問 4.4 $\overrightarrow{p_1 p_2} + \overrightarrow{p_2 p_3} = \overrightarrow{p_1 p_3}$ であるから, 問 4.2 の不等式に帰着される.

問 4.5 $t_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + t_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ とするとき, この両辺と \mathbf{a}_i との内積を取れば,

$$t_i = (t_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + t_k \mathbf{a}_k) \cdot \mathbf{a}_i = 0.$$

問 4.6 k 次元平面を $\mathbf{p} + H$ とするとき, 部分空間 H の直交補空間 H^\perp の基底を $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{d-k}$ として, $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{p} = b_i$ とおけばよい.

問 4.7 (1) 直交射影 P について, $P^2 = P$ および, $P\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot P\mathbf{y}$ ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^N$) が成り立つことを使う. $\mathbf{x} \in H$ に対して $P\mathbf{x} = \mathbf{x}$ であり, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{x} \cdot P\mathbf{f}_i = P\mathbf{x} \cdot \mathbf{f}_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}_i$ が成り立つから, 例題 4.2 により

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_1)^2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_N)^2 = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{f}_1)^2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{f}_N)^2 = \|\mathbf{x}\|^2.$$

(2) 線形代数を使う. まず仮定から, 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$ に対して

$$\sum_{i=1}^N ((\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{a}_i)^2 = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2$$

が成り立つ. これを展開し, $\sum_{i=1}^N (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_i)^2 = \|\mathbf{x}\|^2$, $\sum_{i=1}^N (\mathbf{y} \cdot \mathbf{a}_i)^2 = \|\mathbf{y}\|^2$ を使えば

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_i)(\mathbf{y} \cdot \mathbf{a}_i) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

が得られる. これを

$$\left(\sum_{i=1}^N (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_i) \mathbf{a}_i \right) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

と書き直せば, \mathbf{y} の任意性により,

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_i) \mathbf{a}_i = \mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in H)$$

であることがわかる. そこで, $P' : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$ を $P'\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_i) \mathbf{a}_i$ により定義すれば, P' は \mathbf{R}^N から H への直交射影 P に一致することがわかる (実際, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ ($\mathbf{x}_1 \in H$, $\mathbf{x}_2 \in H^\perp$) と分解すれば, $\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{a}_i = 0$ であるから, $P'\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 = P\mathbf{x}$ となる).

これ以後, ベクトルはすべて列ベクトルで表し, $N \times N$ 行列 A を, $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N)$ により定める. $\mathbf{x} = {}^t(x_1, \dots, x_N)$ に対して, $A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N x_i \mathbf{a}_i$ であることに注意すれば

$$A^t A \mathbf{x} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_N \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_i) \mathbf{a}_i = P \mathbf{x}$$

が得られる。よって、 $A^t A = P$ 。また、 $P A \mathbf{x} = \sum_{i=1}^N x_i P \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^N x_i \mathbf{a}_i = A \mathbf{x}$ であるから、 $P A = A$ 。

N 次の直交行列 U で、 $U^t A = P$ となるものが存在することを示そう。 ${}^t A \mathbf{x} = {}^t A \mathbf{y}$ のとき、 $P \mathbf{x} = A^t A \mathbf{x} = A^t A \mathbf{y} = P \mathbf{y}$ であるから、 $U^t A \mathbf{x} = P \mathbf{x}$ とおくことにより、 ${}^t A$ の像 $\text{Image } {}^t A$ 上で U を定義することができる。

$$\|U^t A \mathbf{x}\|^2 = \|P \mathbf{x}\|^2 = P \mathbf{x} \cdot P \mathbf{x} = P \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = (A^t A \mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = {}^t A \mathbf{x} \cdot {}^t A \mathbf{x} = \|{}^t A \mathbf{x}\|^2$$

に注意すれば、 U を $\text{Image } {}^t A$ の直交補空間に拡張して直交変換となるようにできることがわかる。

$U^t A = P$ の両辺の転置行列を考えれば、 $A^t U = P$ が得られ、 ${}^t U = U^{-1}$ を代入すれば、 $A U^{-1} = P$ 、すなわち $A = P U$ が得られる。 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N$ を \mathbf{R}^N の基本ベクトルとすると、 $A \mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i$ であるから、 $\mathbf{f}_i = U \mathbf{e}_i$ とおけば、 $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_N$ は正規直交基底であり、かつ $P \mathbf{f}_i = \mathbf{a}_i$ を満たす。

問 4.8 L_1, L_2 がルート格子であることを見るには、 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ がそれぞれ L_1, L_2 の \mathbf{Z} -基底を含むことを示せば十分。 $\mathbf{x} \in \mathcal{R}$ とすると、ある $\mathbf{x}_i \in L_i$ ($i = 1, 2$) により $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ と表される。 $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0$ であるから、 $\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{x}_2\|^2$ であり、 $\mathbf{x}_1 = 0$ あるいは $\mathbf{x}_2 = 0$ でなければならない。よって、 $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ が成り立ち、 $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ となる。 $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}$ は明らかだから、 $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ 。 \mathcal{R} が L の \mathbf{Z} -基底を含むことから、 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ がそれぞれ L_1, L_2 の \mathbf{Z} -基底を含むことが結論される。

問 4.9 $\overline{pp}_i = \mathbf{a}_i$ とおけば、重心の定義から、 $\mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_{d+1} = \mathbf{0}$ であり、等辺単体の定義から、 $\|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j\|^2$ ($i \neq j$) は一定の値である。この値を α^2 とする。まず、異なる i, h, k に対して

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \|\mathbf{a}_h - \mathbf{a}_k\|^2 = \|\mathbf{a}_h - \mathbf{a}_i\|^2 + \|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_i\|^2 - 2(\mathbf{a}_h - \mathbf{a}_i) \cdot (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_i) \\ &= 2\alpha^2 - 2(\mathbf{a}_h - \mathbf{a}_i) \cdot (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_i) \end{aligned}$$

が成り立つから、 $(\mathbf{a}_h - \mathbf{a}_i) \cdot (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_i) = (1/2)\alpha^2$ を得る。次に

$$(d+1)\mathbf{a}_i = (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_1) + \dots + (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{d+1})$$

の両辺のノルムの二乗を考えれば（右辺は第 i 番目の項が $\mathbf{0}$ であることに注意）、

$$\begin{aligned} (d+1)^2 \|\mathbf{a}_i\|^2 &= \sum_{k=1}^{d+1} \|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_k\|^2 + 2 \sum_{h < k} (\mathbf{a}_h - \mathbf{a}_i) \cdot (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_i) \\ &= d\alpha^2 + 2 \frac{d(d-1)}{2} \frac{1}{2} \alpha^2 \end{aligned}$$

が得られ, これから, すべての i に対して $\|\mathbf{a}_i\|^2 = (d/2(d+1))\alpha^2$ が導かれる. さらに, $i \neq j$ のとき

$$\alpha^2 = \|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j\|^2 = \|\mathbf{a}_i\|^2 + \|\mathbf{a}_j\|^2 - 2\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \frac{d}{d+1}\alpha^2 - 2\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$$

となるから,

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = -\frac{1}{2(d+1)}\alpha^2.$$

問 4.10 L を立方格子とすると, $\alpha(L) = 1$ とすると, $V(L) = 1$ であるから

$$\mu(L) = \frac{4\pi}{3}2^{-3} = \frac{\pi}{6}.$$

問 4.11 L を面心立方格子とすると, $\alpha(L) = \sqrt{2}$, $V(L) = 2$ であるから (問 1.19),

$$\mu(L) = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 2^{-1} = \frac{\pi}{\sqrt{18}}.$$

問 4.12 (1) 不等式 $\alpha(L)^d \leq 2^d \omega_d^{-1} V(L)$ から, $\alpha(L) < r$ が導かれる. $\alpha(L)$ の定義から, これは $0 \neq \|\mathbf{x}\| < r$ を満たす $\mathbf{x} \in L$ の存在を意味する.

(2) 対偶を証明する. K が L の要素 (格子点) で $\mathbf{0}$ と異なるものを含まないと仮定する. このとき,

$$\frac{1}{2}K + \mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in L) \tag{B.2}$$

は互いに重ならない図形の族となる. 実際,

$$\left(\frac{1}{2}K + \mathbf{x}\right) \cap \left(\frac{1}{2}K + \mathbf{y}\right)$$

が空でなければ, $(1/2)\mathbf{a} + \mathbf{x} = (1/2)\mathbf{b} + \mathbf{y}$ となる $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in K$ が存在するが,

$$\frac{1}{2}(\mathbf{a} + (-\mathbf{b})) = \mathbf{y} - \mathbf{x} \in L$$

となり, K の凸性と対称性から左辺は K に属すから, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ となる. これは図形の族 (B.2) が重ならないことを意味する. そこで (B.2) の密度を考えると,

$$1 \geq \text{vol}\left(\frac{1}{2}K\right)/V(L) = 2^{-d} \text{vol}(K)/V(L)$$

となるから, $\text{vol}(K) \leq 2^d V(L)$ が成り立つ.

問 4.13 線形代数の知識を必要とする. \mathbf{R}^d の線形変換 T を

$$T(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_1)\mathbf{a}_1 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_N)\mathbf{a}_N$$

により定義する. $g \in G$ について

$$T(g\mathbf{x}) = (g\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_1)\mathbf{a}_1 + \cdots + (g\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_N)\mathbf{a}_N$$

$$\begin{aligned}
&= (\mathbf{x} \cdot g^{-1} \mathbf{a}_1) \mathbf{a}_1 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot g^{-1} \mathbf{a}_N) \mathbf{a}_N \\
&= g[(\mathbf{x} \cdot g^{-1} \mathbf{a}_1) g^{-1} \mathbf{a}_1 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot g^{-1} \mathbf{a}_N) g^{-1} \mathbf{a}_N]
\end{aligned}$$

が成り立ち、 S についての仮定から $\{g^{-1} \mathbf{a}_1, \dots, g^{-1} \mathbf{a}_N\} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N\}$ であり、よって $T(g\mathbf{x}) = gT(\mathbf{x})$ を得る。ところで、 T は対称行列 (作用素) であるから、 T は実固有値を持つ。 c を実固有値とすると、 $H = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d; T(\mathbf{x}) = c\mathbf{x}\}$ は $\{0\}$ と異なる部分空間であり、 $\mathbf{x} \in H$ に対して $T(g\mathbf{x}) = gT(\mathbf{x}) = cg\mathbf{x}$ であるから $g\mathbf{x} \in H$ 、すなわち H は G に関して不変な部分空間である。よって、仮定から $H = \mathbf{R}^d$ となり、

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_1) \mathbf{a}_1 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_N) \mathbf{a}_N = c\mathbf{x}$$

であることが導かれる。注意 4.5 に与えた事実を使えば主張を得る。

問 4.14 $\mathbf{b}_1 = \mathbf{p}, \mathbf{b}_2 = \mathbf{p} - \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{b}_{d+1} = \mathbf{p} - \mathbf{a}_d$ とするとき、 $\sum_{i=1}^{d+1} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_i) \mathbf{b}_i = \mathbf{x}$ が任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$ に対して成り立つことを示せばよい。そのためには、 $\mathbf{x} = \mathbf{a}_j$ ($j = 1, \dots, d$) に対してこれを確かめればよい ($\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$ は \mathbf{R}^d の基底であることを使う)。

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_j = \frac{1}{d+1} (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_j + \cdots + \mathbf{a}_d \cdot \mathbf{a}_j) = \frac{1}{d+1} (d-1+2) = 1$$

に注意すれば

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{d+1} (\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{b}_i) \mathbf{b}_i &= (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_j) \mathbf{p} + \sum_{i=1}^d (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j) (\mathbf{p} - \mathbf{a}_i) \\
&= \mathbf{p} - (\mathbf{p} - \mathbf{a}_j) = \mathbf{a}_j
\end{aligned}$$

を得る。

問 4.15 $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$ とおく。 A_d に属す頂点 \mathbf{z} を始点とする辺は、 \mathbf{z} と $\mathbf{z} + \mathbf{p} - \mathbf{a}_i$ ($i = 0, 1, \dots, d$) を結ぶ線分であり、 $\mathbf{z} \in A_d$ を動かすとき、すべての辺はこれで尽くされる ($\mathbf{p} + A_d$ に属す頂点 $\mathbf{p} + \mathbf{z}$ ($\mathbf{z} \in A_d$) を始点とする辺は、 $\mathbf{p} + \mathbf{z}$ と $\mathbf{z} + \mathbf{a}_i = \mathbf{p} + \mathbf{z} + (-\mathbf{p} + \mathbf{a}_i)$ ($i = 0, 1, \dots, d$) を結ぶ線分であるが、 $\mathbf{z} + \mathbf{a}_i \in A_d$ であり、 $\mathbf{p} + \mathbf{z} = \mathbf{z} + \mathbf{a}_i + \mathbf{p} - \mathbf{a}_i$ であることに注意すれば、この辺も上で述べたものになっている)。 \mathbf{z} と $\mathbf{z} + \mathbf{p} - \mathbf{a}_i$ を結ぶ線分の中点を中心とする点対称変換 T は

$$T(\mathbf{x}) = -\mathbf{x} + 2 \frac{1}{2} (\mathbf{z} + \mathbf{z} + \mathbf{p} - \mathbf{a}_i) = -\mathbf{x} + 2\mathbf{z} + \mathbf{p} - \mathbf{a}_i$$

により与えられる。この式から、 $\mathbf{x} \in A_d$ に対しては、 $T(\mathbf{x}) \in \mathbf{p} + A_d$ であり、 $\mathbf{p} + \mathbf{x} \in \mathbf{p} + A_d$ に対しては、 $T(\mathbf{p} + \mathbf{x}) \in A_d$ であることがわかる。よって、頂点の集合の不変性が確かめられた。

次に、辺の集合の不変性を確かめる。 $\mathbf{x} \in A_d$ のとき、 \mathbf{x} と $\mathbf{x} + \mathbf{p} - \mathbf{a}_j$ を結ぶ辺は、 T により 2 点

$$T(\mathbf{x}) = -\mathbf{x} + 2\mathbf{z} + \mathbf{p} - \mathbf{a}_i,$$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x} + \mathbf{p} - \mathbf{a}_j) &= -\mathbf{x} - \mathbf{p} + \mathbf{a}_j + 2\mathbf{z} + \mathbf{p} - \mathbf{a}_i = -\mathbf{x} + 2\mathbf{z} - \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j \\ &= T(\mathbf{x}) + (\mathbf{a}_j - \mathbf{p}) \end{aligned}$$

を結ぶ線分に写るが、これは $T(\mathbf{x}) \in \mathbf{p} + A_d$ を始点とする辺である。よって、辺の集合をも T で不変である。

第5章

問 5.1 たとえば、 n 枚の籤に 1 から n までの番号をつけて、当たり籤の番号は 1 とする。順次袋から取り出したときの結果は $\{1, \dots, n\}$ の順列により与えられるから、結果の総数は $n!$ であり、どの順列も「同様に確からしい」結果である。順列の中で k 番目が 1 となるものの総数は、残り数字の順列の総数 $(n-1)!$ に等しい。よって、 k 番目に当たり籤を引く経験的確率は $(n-1)!/n! = 1/n$ により与えられる。すなわち、何番目でも当たる可能性は同じである。

問 5.2 $A \cap B$ は 10 で割り切れる事象を表している。2 で割り切れる自然数の個数は $1000/2 = 500$ 、5 で割り切れる個数は $1000/5 = 200$ 、10 で割り切れる個数は $1000/10 = 100$ であるから

$$\begin{aligned} P^e(A) &= 500/1000 = 1/2, & P^e(B) &= 200/1000 = 1/5, \\ P^e(A \cap B) &= 100/1000 = 1/10 = P^e(A)P^e(B) \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、 A, B は独立である。

問 5.3 X の取る値を x_1, \dots, x_n 、 Y の取る値を y_1, \dots, y_m とする。 $A_i = \{\omega; X(\omega) = x_i\}$ 、 $B_j = \{\omega; Y(\omega) = y_j\}$ とおくと、 $C_{ij} = A_i \cap B_j$ ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$) は互いに排反な事象であり、 $\Omega = \bigcup_{i,j} C_{ij}$ である。 $aX + bY$ は C_{ij} 上で一定値 $ax_i + by_j$ を取るから

$$E(aX + bY) = \sum_{i,j} (ax_i + by_j)P(C_{ij}).$$

ところで、 i を留めるとき、 $\sum_{j=1}^m x_i P(C_{ij}) = x_i P(A_i)$ であり、同様に $\sum_{i=1}^n y_j \cdot P(C_{ij}) = y_j P(B_j)$ が成り立つから、

$$E(aX + bY) = a \sum_{i=1}^n x_i P(A_i) + b \sum_{j=1}^m y_j P(B_j) = aE(X) + bE(Y).$$

問 5.4 $A = \{x \in \mathbf{R}; |x - m| \geq t\}$ 、 $B = \{x \in \mathbf{R}; |x - m| < t\}$ とすると

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |x - m|^2 p(x) dx = \int_A |x - m|^2 p(x) dx + \int_B |x - m|^2 p(x) dx \\ &\geq \int_A |x - m|^2 p(x) dx \geq t^2 \int_A p(x) dx = t^2 P(\{\omega; |X(\omega) - m| \geq t\}). \end{aligned}$$

問 5.5 (Ω^*, P^*) を (Ω, P) の無限直積とし, $A = \{\omega \in \Omega; X(\omega) < a\}$ とおく. Ω^* 上の確率変数 X_k を本文の式 (5.9) により定めるとき, $E(X_k) = P(X < a) = F(a)$, 同様に $V(X_k) = F(a)(1 - F(a))$ であり, $\omega^* = (\omega_1, \dots, \omega_N, \dots)$ とするとき

$$X_1(\omega^*) + \dots + X_N(\omega^*) = |\{i = 1, \dots, N; x_i < a\}|$$

である. 大数の強法則により $P^*(\mathbf{A}) = 1$ であるような \mathbf{A} に属す ω^* に対して

$$\frac{1}{N} |\{i = 1, \dots, N; x_i < a\}| \rightarrow F(a) \quad (N \rightarrow \infty)$$

が成り立つ「無作為」に個体 $\omega_1, \omega_2, \dots$ を選べば, $\omega^* = (\omega_1, \omega_2, \dots)$ は \mathbf{A} に属すと考えてよい.

問 5.6 E_k を「第 $2k-1$ 回目に初めて甲が勝つ」事象とする. これらは互いに排反であり, 甲が勝つ事象 E は E_1, E_2, \dots の和事象である. $P(E_k) = (1-p)^{2k-2}p$ であることから,

$$P(E) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{2k-2} p = \frac{1}{2-p}.$$

問 5.7 2次元標準格子を正方格子と考え, n ステップのうち k 回横方向に移動する歩き方を考える (したがって縦方向の移動は $n-k$ 回である). このような歩き方の総数は ${}_n C_k$ である. 横方向の移動をさらに場合分けして, h_1 回進み, $k-h_1$ 回後退する移動を考える. この総数は ${}_k C_{(k+x_1)/2}$ である. 縦方向の移動についても, h_2 回上に, $n-k-h_2$ 回下に行く移動を考える. この総数は ${}_{n-k} C_{(n-k+x_2)/2}$ である.

問 5.8 帰納法で示す. $n=1$ のときは L の定義そのものである. n のとき正しいと仮定する. 例題 5.3(2) を使えば

$$\begin{aligned} (L^{n+1}f)(x) &= L(L^n f)(x) = \sum_{z \in V} p(1, x, z) L^n f(z) \\ &= \sum_{z \in V} \sum_{y \in V} p(1, x, z) p(n, z, y) f(y) = \sum_{y \in V} p(n+1, x, y) f(y) \end{aligned}$$

であるから, $n+1$ のときも正しい.

問 5.9 $f(x_0)$ が最大値とする. 離散的ラプラシアン の定義から

$$\sum_{e \in E; o(e)=x_0} p(e) [f(t(e)) - f(x_0)] = 0$$

である. ところが, $f(t(e)) \leq f(x_0)$ であるから,

$$f(t(e)) = f(x_0) \quad (e \in E; o(e) = x_0)$$

でなければならない. 任意の頂点 x に対して, $o(c) = x_0, t(c) = x$ となる路 $c =$

(e_1, \dots, e_n) が存在するから, 今示したことを使えば,

$$f(x_0) = f(t(e_1)) = f(t(e_2)) = \dots = f(x)$$

となる.

$f(x_0)$ が最小値のときも同様である.

第 6 章

問 6.1 長さが $d(x, y)$ の路 c_1 で x, y を結び, 長さが $d(y, z)$ の路 c_2 で y, z を結ぶ. c_1 を辿り, 続けて c_2 を辿る路 c は, x, z を結ぶから,

$$d(x, z) \leq c \text{ の長さ} = d(x, y) + d(y, z).$$

問 6.2 $z \in B_{r-s}(x)$ に対して,

$$d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y) = (r - s) + s = r$$

であるから, $z \in B_r(y)$ である. よって, $B_{r-s}(x) \subset B_r(y)$ が成り立つ. まったく同様に $B_r(y) \subset B_{r+s}(x)$ が示される.

問 6.3 もし, $y \notin \bigcup_{x \in A} B_{2r}(x)$ となる点 y が存在すると仮定. このとき, $B_r(y) \cap B_r(x) = \emptyset$ がすべての $x \in A$ について成り立つ. 実際, ある x について $z \in B_r(y) \cap B_r(x)$ とすると, 三角不等式により, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq 2r$ であるから, $y \in \bigcup_{x \in A} B_{2r}(x)$ となってしまう. よって, $A' = \{y\} \cup A$ とおくと, $\{B_r(x)\}_{x \in A'}$ は互いに交わらない球体の族である. これは, A の最大性に矛盾する.

問 6.4 $g \in \text{Aut}(X)$ と路 $c = (e_1, \dots, e_n)$ に対して, $gc = (ge_1, \dots, ge_n)$ は $o(g(c)) = g(o(c)), t(g(c)) = g(t(c))$ を満たす路であることを使えばよい.

問 6.5 $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ は明らか.

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_\infty = d_\infty(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

$$\begin{aligned} d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{z}) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_\infty = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{z}\|_\infty \\ &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_\infty = d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d_\infty(\mathbf{y}, \mathbf{z}). \end{aligned}$$

問 6.6 絶対値の性質 $|a + b| \leq |a| + |b|$ に帰着する.

問 6.7 対称性は $p(-\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$ から, 凸性は $p((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}) \leq p((1-t)\mathbf{x}) + p(t\mathbf{y}) = (1-t)p(\mathbf{x}) + tp(\mathbf{y})$ ($0 \leq t \leq 1$) から従う.

問 6.8 極限図形は

$$K = \{(x_1, x_2, x_3); |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1\}$$

により与えられる．これは正八面体である．

問 6.9 $\{x_n\}$ を $|x_n - n\xi|$ が有界であるような整数列とする．本文の例題 5.4 により

$$\frac{1}{n} \log p(n, 0, x) = \frac{1}{n} \log \left(\frac{n}{n+x} \right) - \log 2$$

であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\frac{n}{n+x_n} \right) = \log 2 - \frac{1+\xi}{2} \log(1+\xi) - \frac{1-\xi}{2} \log(1-\xi)$$

を示せばよい, $n \pm x_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) に注意すれば ($|\xi| < 1$ を使う), $((n+x_n)/2)!$ および $((n-x_n)/2)!$ にスターリングの公式を適用できるから, 本文の例題 5.6 の解で述べた漸近公式から

$$\left(\frac{n}{n+x_n} \right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{n+1} n^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^{-\frac{n+x_n+1}{2}} \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{-\frac{n-x_n+1}{2}}$$

が得られる．よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log \left(\frac{n}{n+x_n} \right) &\sim -\frac{\log 2\pi}{2n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \log 2 \\ &\quad - \frac{1 + \frac{x_n}{n} + \frac{1}{n}}{2} \log \left(1 + \frac{x_n}{n}\right) - \frac{1 - \frac{x_n}{n} + \frac{1}{n}}{2} \log \left(1 - \frac{x_n}{n}\right) \end{aligned}$$

となり, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n/n = \xi$ であるから求める式を得る．

注 上の証明で, 一般に $a_n \sim b_n$ ($n \rightarrow \infty$) および $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ であるとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ が成り立つ事実を使った．この事実は, $|b_n|$ が有界であることと, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $n \geq N$ ならば $|a_n - b_n| < \epsilon |b_n|$ が成り立つような N が存在することから直ちに導かれる．

問 6.10 $\lim_{t \rightarrow \infty} (1/t) \log p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}_t) = -(1/(4c)) \|\xi\|^2$.

付録 C 主な登場人物の紹介

プラトン (前 427–前 347) 古代ギリシャの哲学者。ソクラテスの弟子であり、アリストテレスとともに、中世から近代にかけて発展深化した西欧哲学ばかりでなく、キリスト教の教義にも大きな影響を及ぼした。対話を主とした多くの著述があり、その中には、数学に関連する内容も含まれている (『メノン』、『テアイテトス』、『ティマイオス』)。しかし、プラトン自身の数学への貢献は、あったとしてもマイナーなものと考えられる。

プラトンはアテネ郊外に学園アカデメイアを開き (紀元前 387 年頃)、多くの弟子を育てた。アリストテレスもその一人である。アカデメイアはアカデミーの語源であり、その門扉には「幾何学を知らざるもの、入るべからず」という言葉が記されていたという。また、プルタルコス (Plutarchos; 46?–119?) によって書かれた『饗宴』 (Symposiaka (Problemata)) には、プラトンが「神は幾何学に携わっておられる」と言ったということが書かれている。宇宙の調和を正多面体で説明しようとしたこともあり、5 種の正多面体をプラトン立体と言うことがある。なお、正多面体については、晩年の作といわれる『ティマイオス』の中で述べられており、これが正多面体についての現存する最古の文献である。

哲学の学園としてのアカデメイアの活動は、東ローマ帝国のユスティニウス帝 (Justinianus) が 529 年に閉鎖するまで続いた。

アリストテレス (前 384–前 322) ソクラテス、プラトンに並ぶ、古代ギリシャの最大の哲学者。博物学者でもある。マケドニア出身。学園アカデメイアにおいてプラトンに 20 年間師事、師の死後マケドニアの王子 (後のアレキサンダー大王) の家庭教師になった時期もある。その後アテネにリュケイオンという学校 (ギムナシオン) を建て、そこで形而上学、自然学、論理学、詩学、倫理学、政治学、博物学など、多岐に渡る主題について多くの著述を行った。この学校の学生は逍遥学派とよばれる。ヨーロッパ中世までアリストテレスの思弁的物理および有限的宇宙観は大きな影響を与え、16 世紀になってようやくコペルニクスやガリレイにより乗り越えられることになる。

数学上の直接の寄与はないが、論理学の創始者として数学に間接的な影響を与えた。また、演繹科学の成り立ちを明確に意識し、科学理論は少数の前提から理論のすべての結論を演繹的に導く営みであるとした。アリストテレスのこのような観点はユークリッドの『原論』で現実化されたと言える。なお、アリストテレスによる論理学的著作は、6世紀に『オルガノン』(Organon)と命名された。

プラトン哲学が宗教的超越的であるのと比較して、アリストテレスの哲学は世俗的自然主義的である。この双方の哲学は、キリスト教信仰とギリシャ以降の学問との総合を目指したスコラ哲学に取り入れられた。特にプラトン主義はアウグスティヌス(354-430)によりキリスト教と結びつけられ、アリストテレス主義はトマス・アクィナス(1225-1274)によりキリスト教神学のもとに体系づけられた。

ルネサンス期の科学思想においても、特に「世界」を理解しようとする動機の上では(たとえそれが「負の偏向」に力を貸したとしても)、プラトンやアリストテレスの影響を無視することはできない。

ユークリッド(前300年頃) ギリシャ名はユークレイデスであり、ユークリッドはその英名である。アテネ出身でプトレマイオス一世によりアレキサンドリアに招かれた。13巻からなる『原論』(ストイケイア、英名はElements)の著者である。『原論』で述べられている諸結果にどの程度ユークリッド自身が貢献しているかは不確かである。『原論』は、明白に思われる命題を公準として幾何学の前提に置き、それから数少ない論理規則により厳密に諸定理を証明していくスタイルを取っており、「素数が無限個存在する」ことの証明や、ユークリッドの互除法、正多面体(プラトン立体)の分類などが述べられている。『原論』のスタイルは、ニュートンの『自然哲学の数学的原理(プリンキピア)』やスピノザの『倫理学』にも取り入れられているように、その後の諸科学の発展に大きな影響を与えた。

その広く知られた名にも関わらず、ユークリッドの生涯についてはまったく知られていない。ユークリッドとほぼ同時代のアルキメデスとアポロニウスにより、ユークリッドの名前が言及されているのみである。時代が下って、パップス(3世紀)、ストベウス(5世紀)、プロクロス(5世紀)らにより、ユークリッドの生涯が描かれているが、確実な証言とは言い難い。しかし、プロクロスが『ユークリッド原論第1巻注釈』の中で言明しているように、「ユードクソスの仕事を纏め上げ、テアイテトスのなした多くのものを完全にし、さらに先行者による不完全な証明を非の打ち所ない厳密な論証まで高めた」ことは確かである。ここで、ユードクソスの仕事は「比例論」であり、テアイテトスのなしたことは「(n が非平方数の場合の) \sqrt{n} の無理数性」の証明と正多面体(正八面体と正二十面体)の発見である。ユークリッドがプラトンのアカデメイアで学んだか、あるいはアカデメイアの数学者と交流があったことは確かと考えられる。

プロクロスの著作からの逸話「プトレマイオス一世が、幾何学を学ぶのに手っ取り早い道はないものかとユークリッドに訊ねたところ、『幾何学に王道なし』とユークリッドは答えたという。」

ストベウスの『精華集』からの逸話。「ユークリッドの学生が、幾何学の最初の定理を学んだときに師にたずねた。『それを学んだことによって、何か得ることがあるのでしょうか』。ユークリッドは奴隷を呼んでいった。『彼に小銭をおやり、彼は学んだことから利益を得なければならないようだから』。」



プラトン、アリストテレス、ピタゴラス、ユークリッド
(ラファエロ作『アテネの学堂』)

なお、アレキサンドリアは、アレキサンダー大王が建設した 30 を超える同名の都市の 1 つであり、エジプトの地中海沿岸にある。大王の後継者の一人、プトレマイオス（一世）がエジプトの首都に指名した。ファロスの大灯台とともに、知の灯台とも言える大図書館（ピブリオテケ）と高等研究所（ムセイオン）で有名である。古代ギリシャの学問の伝統は、アレキサンドリアに招かれた学者により引き継がれた。

古代ギリシャの哲学者や数学者の信頼すべき肖像あるいは彫刻は残っていない。あったとしても、それらは後代（ローマ時代）に制作されたものである。時代は遙かに下るが、想像力による絵画の代表的例であるラファエロ作の『アテネの学堂』には、彼と同時代の芸術家たちのイメージに託してプラトンやアリストテレスらの姿が描かれている¹。

アルキメデス（前 287-前 212） 古代ギリシャの植民地シチリア島の都シラクサ出身の数学者、物理学者、工学者。前 3 世紀の半ば頃、天体観測に従事するためアレキサンドリアに赴き、ユークリッドの幾何学と物理学に接したと言われる。円周率の

¹ 1509 年頃の作品であり、ラファエロの最高傑作といわれる。アーチを背景にして中央に立つ二人の人物の左がプラトン、右がアリストテレスである。左手前でノートに書き込んでいる髪の毛のうすい老人はピタゴラス、右手前で学生に囲まれ屈みこんで何やら証明している老人がユークリッドであるという。

近似値，球面の表面積，球の体積を求めた．図形の性質を見出すのに力学的アイデアを積極的に応用したが，このような発見の方法で得られた性質は，背理法や取り尽くし法により厳密に証明されている．アルキメデスの研究方法は，1906年にコンスタンティノーブルにおいて発見された『エラトステネスあての機械学的定理についての方法』の写本の中で述べられている．この他に『放物線の求積』、『砂粒を数えるもの』、『螺旋について』などの著作がある．てこの原理や浮力に関するアルキメデスの原理でも有名．

逸話では，入浴中に浮力の原理を発見し，「喜びのあまりに，裸のまま『ヘウレカ，ヘウレカ』と叫びながら家に向かって走り出した」といわれる．ヘウレカ（ユリイカ）は「私は発見した」という意味である．

パプスは『数学全書』第5巻の中で，アルキメデスが正多面体以外に，13個の「等辺・等角だが相似でない多角形に囲まれた」多面体を発見したと述べている．これらの多面体は，現在アルキメデス多面体とよばれている．なお，アルキメデス多面体を完全な形で再発見したのはケプラーである．

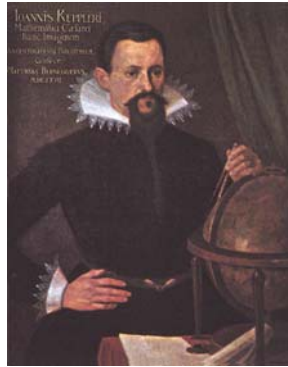
前212年にローマ軍がシラクサに侵攻したときにローマ軍の兵士に殺された．裏庭の砂の上に書いていた図形を兵士が踏みつけたことをアルキメデスが咎めたのに対して，怒った兵士がアルキメデスとは知らずに槍で突き殺したという（プルタルコスの『英雄伝』による）．財務官だったキケロが，紀元前75年にアルキメデスの墓を見つけたことが報告されており，その墓碑には，球の体積と表面積は，いずれもその外接円柱の $\frac{2}{3}$ であることを示す図形が刻まれていたといわれる（その後，墓の所在は不明となった）．

ケプラー（1571–1630）天文学者，数学者．ドイツのヴァイル・デア・シュタットに生まれ，チュービンゲン大学を卒業後，グラーツ州立学校の数学教師となる（1593年）．『宇宙の神秘』を刊行（1596年）．その中でコペルニクスの地動説²に基づき正多面体を用いて当時知られていた5つの惑星（水星，金星，火星，木星，土星）の軌道を説明しようとした³．プトレマイオス以来の伝統であるが，当時の公職数学者の義務として，占星術による予言暦の作成が課せられ，ケプラーも占星術者として活動していた（ケプラーが最初に作った1595年の暦で，寒波の襲来とウィーン南部へのトルコ人の侵入を予言，それが見事に的中したと言われている）．その後，プロテスタントに対する迫害を逃れてプラハに移住．そこでデンマーク出身の天文学者ティコ・

² コペルニクス（1473–1543）の地動説は，著書『天体の回転について』の中で発表された（1543年）．

³ ケプラーによれば，水星，金星，火星，木星，土星の順にその軌道が乗っている球面を S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 とするとき，それらは太陽を中心とする同心球面であり， S_1 は正八面体 K_1 の内接球， S_2 は K_1 の外接球かつ正二十面体 K_2 の内接球， S_3 は K_2 の外接球かつ正十二面体 K_3 の内接球， S_4 は K_3 の外接球かつ正四面体 K_4 の内接球， S_5 は K_4 の外接球かつ正六面体 K_5 の内接球である．

ブラーエ (1546–1601) の助手になる。師の歿後、後継者として帝国数学者に任命された (1601 年)。師の膨大な観測データを整理し、1609 年に『新天文学』を刊行して、その中で惑星の運動に関する第 1 法則と第 2 法則を公表した。1611 年に、『新年の贈り物あるいは六角形の雪について』を刊行。これはブラハのルドルフ王の宮廷の顧問への正月祝いとして書かれたものであり、多面体について興味深い考察を行っている。



ケプラー

1612 年にブラハを追われてリンツに移住。1619 年に『宇宙の調和』を刊行し、第 3 法則を公表した。この他に、アルキメデスの方法を用いて、多くの種類の回転体の体積を求めた。宗教改革の吹き荒れた時代だったこともあり、ヨーロッパ内を転々とし苦難と窮乏の生涯を送った (故郷の老母が 1615 年に隣人の悪意から魔女の嫌疑を受けたときには、ケプラーは自ら法律家となって全力を挙げて救援し、拷問と火柱刑の寸前で救い出すことに成功した (1621 年))。

なお、ケプラーの法則は惑星の運動に関する法則である。

- i) 惑星は太陽を 1 つの焦点とする楕円上を運行する。
- ii) (面積速度一定の法則) 太陽と惑星を結ぶ線分は等しい時間に等しい面積を掃く。
- iii) 惑星が太陽をまわる周期の二乗は、太陽とその惑星の平均距離の 3 乗に比例する (正確には長径の 3 乗)。

フェルマー (1601–1665) フランスの数学者。本職は弁護士であり、南フランスの町トゥルーズの高等行政官の地位 (正確には王立議会の議員の職) に就いたが、余暇はすべて数学の研究に費やしたと言われる。 $n \geq 3$ を自然数とするとき、 $x^n + y^n = z^n$ は自然数解を持たないというフェルマー予想 (フェルマーの大定理) で有名。ディオファントスの『数論』(バシェがラテン語に翻訳した 1637 年度版) の自筆写本の余白に、「(フェルマーの大定理の) 証明を書くには、場所が十分ではない」と書き込んだと言われている (完全な証明は、1994 年にワイルズ (A. Wiles; 1953–) により与え

54 付録 C 主な登場人物の紹介

られた)。この他にも、数論（不定方程式論）についての様々な結果を友人（メルセンヌ、パスカル、カルカヴィ）への書簡の中で言明し、後の時代に大きな影響を与えた（オイラーもその一人である）。確率論、微分積分学でも先駆的な業績を残している。最小作用の原理に繋がるアイデアを用いて屈折の法則を説明したことも、顕著な業績である。



フェルマー

なおメルセンヌは、ヨーロッパの数学者のコミュニケーションの中継基地としての役割を果たしていた。

ニュートン (1642–1727) 英国の物理学者かつ数学者。自作農の子として生まれ、1661年にケンブリッジ大学に入学。1669年にバロウの後を継いで25歳の若さで教授に就任した。1672年に英国の科学研究の中心である王立協会の会員になり、1703年に会長に就任して、1727年に84歳で亡くなるまでその職にあった。

数学と物理学における革命的とも言える業績を挙げたことで、科学史上の巨人の一人である。ライプニッツと並んで微分積分学の開拓者であり、微分積分学の基本定理を発見し、その後の解析学の発展に対する礎石を築いた。また、1687年に出版された彼の不朽の著作『自然哲学の数学的原理（プリンキピア）』(Principia)の中で展開されたニュートンの力学理論は、ガリレオ・ガリレイとケプラーの衣鉢を継いでアリストテレス以来の力学観を決定的に打ち砕く理論であり、相対性理論と量子力学の誕生前夜の19世紀後半まで、物理現象を完全に記述する理論と目されていた。この中で、彼が打ち立てた万有引力の法則と運動法則からケプラーの法則を導いている。なお、ニュートンはデカルトによる幾何学の新しい手法に熟達していたにもかかわらず、『プリンキピア』はユークリッドの『原論』のスタイルで書かれており、古代の幾何学的色彩が濃厚である。この他、反射望遠鏡を発明し、光と色彩についての研究を行った。

ニュートンの人生の後半は、若い頃の研究の整理と造幣局長官就任などの世俗的な活動で占められている。また、原始教会の自由主義を証明する歴史研究としての「神学」

や、怪しげな「錬金術」にのめり込んだりもした（J.M. ケインズによれば、ニュートンは理性に属する最初の人ではなく、最後の魔術師であり錬金術師である（1946年））。



ニュートン

オイラー (1707–1783) 18世紀を代表する比類のない多産な数学者。スイスのバーゼルに生まれ、13歳でバーゼル大学の学生として哲学と神学を学び、18歳で数学についての最初の論文を書いている。優れた数学者を多く輩出したベルヌイ一族との親密な交流はバーゼル時代に始まり、その後のオイラーの研究者としての人生に大きな影響を与えた。生涯のほとんどをフレデリック大王支配のベルリンとエカテリーナ女王が統治したペテルブルグで過ごした。1735年には右目が利かなくなり、その後左目も失明したが、1783年にペテルブルグで歿するまで研究活動が衰えることはなかった。



オイラー

オイラーの最も多産な時期は、無限小解析（微分積分学）が様々な方向に一挙に拡大した時期に重なっている。オイラーは、純粋、応用の両面で、数学のほとんどの分野に貢献している。特に、変分学の基礎を築き、それを力学に応用した。数論に対する貢献や位相幾何学のパイオニアとしての貢献も大きい。形式的ではあるが、複素数

を自由に用いて解析学に応用していることも特筆すべき点である。その仕事には、解析接続の考え方の原型を見ることが出来る。さらに、今日使われている数学の表記法についても、オイラーに負うところが大きい。たとえば、 π (円周率)、 e (自然対数の底)、 i (虚数単位)、 \sum (和の記号) などがそうである。彼の著述『無限解析入門』(Introductio in analysin infinitorum) は 18 世紀の最も重要な数学テキストであった。1911 年に始められたオイラー全集の刊行はまだ終了していない。

ラプラス (1749–1827) フランスのノルマンディ地方生まれの数学者。幼少のときから才能を認められ、1767 年にパリに出て、ダランベール (J.R. d'Alembert; 1717–1783) の知遇を得、その後、高等師範学校、工科大学の教授となった。天体力学、確率論、解析学など、幅広い分野で活躍した天才である。『天体力学』の著述は 5 巻に及び、その中でニュートンの重力理論を太陽系全体の運動に適用した。彼の決定論的観点は、天体力学の研究によって培われた。ナポレオンに「神の役割はどこにあるのかね」と聞かれて、ラプラスは「神の役割を仮定する必要はありません」と答えたという。その一方で、確率論の近代化でも大きな役割を果たし、その手法は広く解析学で使われることとなった。フランス革命後の新体制の下では、メートル法の整備に尽力し、ナポレオン帝政時代に内務大臣をしばらく務め、伯爵を授けられた。その後の王制復古時代も上手に生き長らえ、ルイ 18 世からは侯爵に任ぜられた。エジプト学者としてナポレオンのエジプト遠征に同行し、多くの考古学的貢献もしている。なお、シャンポリオンが解読した古代エジプト文字 (象形文字) が書かれているロゼッタ石は、この遠征のときにフランスに持ち帰られたものである (現在は、大英博物館に収蔵展示されている)。



ラプラス

ガウス (1777–1855) 数学史上に燦然と輝く業績を数多く挙げた数学者。「数学の王」とも称せられる。哲学ではカントがそうであるように、すべての数学は一旦ガウスに流れ込み、大きく形を変えてガウスから流れ出たと言っても過言ではない。ドイツのブラウンシュヴァイクで貧しい家に生まれたが、幼少の頃から数学の才能を示し、領主のフェルディナンド大公の庇護の下でゲッチンゲン大学で学ぶ。代数方程式は常に (複素数) 解を持つという「代数学の基本定理」の証明により、1799 年に学位を取

得, 1807 年から終生ゲッチンゲン大学の教授の地位にあった。天文学・電磁気学に対する貢献も大である。

19 歳のときに正 17 角形の作図が可能であることを発見, これがガウスを数学, 特に整数論の研究に向かわせる動機となった。整数論に対するガウスの貢献は, 極めて多大なものであり, その後の代数的整数論の発展に決定的な影響を与えた。また, ガウスの未発表のノートにおいて展開された楕円関数論は, 時代を超越する高度の内容を持つ。実際, ガウスの見越していた楕円関数論の道筋は, その後アーベルとヤコビによって完成された。



ガウス

ガウスは「完全主義者」であったこともあり, 開拓途上ということで, 多くの発見を論文や著書として発表することがなかった。複素関数論や位相幾何学に繋がる結果も未発表である。複素関数論はコーシーにより, 位相幾何学は弟子のリスティングを経てポアンカレにより発展された。また, ロバチェフスキーとボヤイにより独立に発見された非ユークリッド幾何学も, ガウスが既に知っていたことは, 友人への書簡に表明されている内容から明かであるが, 決して公にされることはなかった。非ユークリッド幾何学の発見は曲面の微分幾何学の創始とともに, ガウスが「空間概念」の新理論に壮大な構想を持っていたことを示唆している。ガウスの夢は, 1854 年にリーマンの教授資格講演の中で実現することになった。

ヒルベルト (1862–1943) ケーニヒスベルク生まれのドイツの数学者。数学万能者であり, 19 世紀後半から 20 世紀前半にかけての最大級の数学者の一人である。1885 年に不変式論に関する論文によりケーニヒスベルク大学から学位を取得, 翌年同大学講師, 1892 年に教授に昇格した。クラインの招きで 1895 年にゲッチンゲン大学教授になり, 以後終生その職にあった。幾何学基礎論, 代数的整数論, ポテンシャル論, 積分方程式論, 数学基礎論など, 数学の広い分野で活躍し, ワイルやデーネ (M. Dehn; 1878–1952) など多くの優秀な弟子を育てた。幾何学基礎論では, ユークリッドの『原論』に書かれている内容の不完全性を指摘し, 完全な公理系を打ち立てることにより, 厳密な幾何学理論を再構成している。また, ガウス, ディリクレの系譜上にある代数

的整数論は、ヒルベルトの主要な業績の1つであり、現代整数論の基点となった。ヒルベルトの名は、ヒルベルト空間、ヒルベルト変換、ヒルベルトの保形形式など、多くの概念に冠せられている。1900年にパリで開催された国際会議において提出した23の未解決問題は、20世紀の数学の発展に大きな刺激を与えた。



ヒルベルト

ミンコフスキー (1864–1909) ドイツ人を両親として、ロシアのアレクソタス (現在のリトアニア) に生まれた。家族と共にケーニヒスベルクに移住、15歳でギムナジウムを卒業後、当地の大学とベルリン大学で学んだ。学生時代の1882年には、パリ学士院の懸賞問題「自然数の5つの平方数の和による表現」に応募し、オックスフォード大学のスミス (M. Smith; 1826–1883) と共にグランプリを獲得。1885年にケーニヒスベルク大学から「 n 変数の正値2次形式」についての論文により学位を取得し、1887年から同大学で教鞭を取る。1892年にボン大学に移り、1894年に教授となった。親友のヒルベルトがケーニヒスベルクからゲッチンゲンに移るのに伴い、再びケーニヒスベルクに戻ったが (1895年)、2年後にはスイス連邦工科大学に移り、1902年にはさらにゲッチンゲン大学に新しいポストを得た。1909年の盲腸炎による

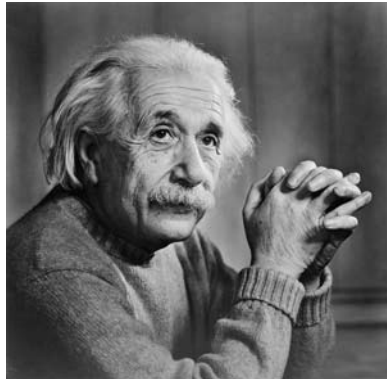


ミンコフスキー

突然の死は、親友ヒルベルトばかりでなく、学界の大きな損失であり悲しみであった。

スイス連邦工科大学で教鞭を取っていたときに、学生だったアインシュタインを教えたことがある。「アインシュタインの深遠な理論は数学的には稚拙であるが、これは私から数学を学んだからである」と冗談交じりに言ったという。死の前年（1908年）に、アインシュタインの特殊相対性理論の数学的定式化を与え、理解を容易にしたことは特筆すべき業績である。また、「数の幾何学」を創始して、整数論に大きな貢献を行った。

アインシュタイン (1879–1955) ニュートンに比肩されるドイツ出身の理論物理学者。西南ドイツ（バイエルン）のシュワーベン地方の中都市ウルムに生まれたが、生後1年でミュンヘンに移り住んだ。地元の高校（ジムナジウム）を卒業後、スイスのチューリッヒ工科大学に入学、在学中にスイス国籍を獲得。卒業後は、ベルン（スイス）の特許局技師になり、発明の予備調査の仕事に従事した。在職中、光量子仮説、特殊相対性理論、ブラウン運動の理論を発表（1905年）。その後、スイス、チェコ（プラハ）、ドイツ（ベルリン）の大学の教授となり、1916年に一般相対性理論を発表、1919年の日食観測により理論の正しさが実証された。「光電効果の法則と理論物理学の領域における業績」に対して1921年度のノーベル物理学賞を受けた。1922年（大正11年）に改造社の招きで来日、1ヶ月に及ぶ講演旅行を行い、各地で熱狂的歓迎を受けた。ユダヤ系だったこともあり、第1次大戦後の右傾化するドイツでは厳しい環境におかれていた。1933年に、ナチの迫害を逃れて米国に渡り、1945年に引退するまで、プリンストン高等科学研究所の教授を務めた。平和主義者としても有名である。



アインシュタイン

グロモフ (1943–) レニングラードに近いバクシトゴルスクに生まれる。レニングラード大学で学んだ後、1967年から1972年まで同大学で助教授を務める。1974

年から 1982 年までニューヨーク州立大学教授，1981 年から 1982 年までパリ第 VI 大学教授．1982 年にフランスの高等科学研究所 (IHÉS) 教授となり，現在にいたる (1991 年よりフランス国民)．19 世紀のリーマンとポアンカレ，20 世紀のカルタンとチャーンに続く，現代幾何学の世界に輝く巨星といえる．主な受賞歴にフランス科学学士院のエリー・カルタン賞 (1984 年)，ウルフ賞 (1993 年)，アメリカ数学会のスティール賞 (1997 年) がある．また，「様々な幾何学的対象の族に距離構造を導入し，幾何学を始めとする数学の多分野の研究に飛躍的發展を与えたことへの貢献」により，2002 年度の京都賞を受賞した．専門は幾何学で，偏微分方程式のトポロジー，リーマン幾何学，半リーマン多様体論，シンプレクティック幾何学，無限群の漸近理論，および確率論の組合せ幾何的側面などの研究を行っている．最近は計算機科学や分子生物学に多大の興味を持っている．



グロモフ

参考文献

- [1] 伊藤清,『確率論』,岩波書店,1991年
- [2] 熊原啓作,砂田利一,他,『数理システム科学』,「離散システム」,放送大学,2002年
- [3] 白水晴雄,青木義和,『宝石のはなし』,技報堂出版,1989年
- [4] 砂田利一,『分割の幾何学』,日本評論社,2000年
- [5] 砂田利一,『幾何入門』,岩波書店,2003年
- [6] 砂田利一,『行列と行列式』,岩波書店,2003年
- [7] 砂田利一,『幾何入門』,放送大学教育振興会,2004年
- [8] 砂田利一,『曲面の幾何』,岩波書店,2004年
- [9] 砂田利一,『物の理・数の理』全5巻,岩波書店,2005年
- [10] 砂田利一,「有限の世界から現代数学を眺める」,『現代数学の土壌』,日本評論社,2001年
- [11] 砂田利一,『基本群とラブラシアン』,紀伊國屋書店,1988年
- [12] 坂内英一,「O. ミューズンによる4次元キッキング数の決定」,『数学セミナー』,2005年10月号,pp.50-57
- [13] 坂内英一,坂内悦子,『球面上の代数的組合せ理論』,シュプリンガー・フェアラーク東京,1999年
- [14] 原田耕一郎,『群の発見』,岩波書店,2001年
- [15] 一松信,『正多面体を解く』,東海大学出版会,2002年
- [16] 一松信,『初等幾何入門』,岩波書店,2003年
- [17] 伏見康治,安野光雅,中村義作,『美の幾何学』,中公新書 554,中央公論社,1979年
- [18] M. アイグナー,G.M. ツィーグラ(蟹江幸博 訳),『天書の証明』,シュプリンガー・フェアラーク東京,2002年
- [19] D. ウェルズ(宮崎興二,藤井道彦,日置尋久,山口哲 訳),『不思議おもしろ幾何学事典』,朝倉書店,2002年

- [20] F. クライン (関口次郎, 前田博信 訳), 『改訂新版 正 20 面体と 5 次方程式』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2005 年
- [21] P.R. クロムウエル (下川航也, 平澤美可三, 松本三郎, 丸山嘉彦, 村上斉 訳), 『多面体』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2001 年
- [22] ヨハネス・ケプラー (大槻真一郎, 岸本良彦 訳), 『宇宙の神秘』, 工作舎, 1982 年
- [23] Ya.G. シナイ (森真 訳), 『確率論入門コース』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1995 年
- [24] W・シャーラウ, H・オポルカ (志賀弘典 訳), 『フェルマーの系譜』, 日本評論社, 1994 年
- [25] ジョージ・G・スピーロ (青木薫 訳), 『ケプラー予想』, 新潮社, 2005 年
- [26] フェイエシュ・トート (樋口伊佐夫, 種村正美 訳), 『配置の問題』, みすず書房, 1983 年
- [27] アイザック・トドハンター (安藤洋美 訳), 『確率論史』, 現代数学社, 1975 年
- [28] ラプラス (伊藤清, 樋口順四郎 訳), 『確率論』, 現代数学の系譜, 共立出版, 1986 年
- [29] S. ラング (松坂和夫, 片山孝次 訳), 『解析入門』, 岩波書店, 1978 年
- [30] Peter Frankl, 前原潤, 『幾何学の散歩道』, 共立出版, 1991 年
- [31] D.G. Morris (石川勉 訳), 『立体化学の基礎』, 化学同人, 2003 年
- [32] N.L. Biggs, E.K. Lloyd, R.J. Wilson, “Graph Theory 1736–1936”, Clarendon Press, 1976
- [33] K. Böröczky, “Finite Packing and Covering”, Cambridge University Press, 2004
- [34] H.S.M. Coxeter, “Regular Polytopes”, Dover, 1973
- [35] W. Ebeling, “Lattices and Codes”, Vieweg, 1994
- [36] M. Gromov, “Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian spaces”, Birkhäuser, 1999
- [37] M. Kotani, T. Sunada, Spectral geometry of crystal lattices, *Contemporary. Math.* 338 (2003), 271–305.
- [38] M. Kotani, T. Sunada, Standard realizations of crystal lattices via harmonic maps, *Trans. A.M.S.* 353 (2001), 1–20.
- [39] M. Kotani, T. Sunada, Albanese maps and an off diagonal long time asymptotic for the heat kernel, *Comm. Math. Phys.* 209 (2000), 633–670.
- [40] M. Kotani, T. Sunada, Large deviation and the tangent cone at infinity of a crystal lattice, *Math. Z.* (2006) to appear
- [41] J. Milnor, D. Husemoller, “Symmetric Bilinear Forms”, Springer 1973
- [42] J.A. Wolf, “Spaces of Constant Curvature”, McGraw-Hill, 1967
- [43] E.A. Wood, “Crystals and Light”, Dover, 1977
- [44] C. Zong, “Sphere Packings”, Springer, 1999