

『シュツツ相対論入門 I 特殊相対論』に誤りがございました。

お詫びして訂正いたします。

(2020年7月)

練習問題のヒントと解答 [付8] 1章 18

[誤] $\tanh [N \tanh^{-1}(0.9)] \approx 1 - 2(19)^{-N/2}$

[正] $\tanh [N \tanh^{-1}(0.9)] \approx 1 - 2(19)^{-N}$

【解答の一例】

$$u = \tanh^{-1} v \quad (1)$$

$$v = 0.9 \quad (2)$$

と書くことにする。すると、第 N 番目の星の最初の星に対する速度 V は、

$$\begin{aligned} V &= \tanh(Nu) \\ &= \frac{\exp(Nu) - \exp(-Nu)}{\exp(Nu) + \exp(-Nu)} \\ &= \frac{1 - \exp(-2Nu)}{1 + \exp(-2Nu)} \\ &\sim (1 - \exp(-2Nu)) \times (1 - \exp(-2Nu) + \dots) \\ &= 1 - 2 \exp(-2Nu) + \dots \\ &= 1 - 2(\exp(2u))^{-N} + \dots \quad (3) \end{aligned}$$

第3式から第4式への計算は $\exp(-2Nu)$ が1に比べて非常に小さいこと (u が正で N が非常に大きいので) を使って展開した。

式 (1) から

$$\begin{aligned} v &= \tanh(u) \\ &= \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} \\ &= \frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1} \quad (4) \end{aligned}$$

なので、この式から

$$e^{2u} = \frac{1+v}{1-v} \quad (5)$$

となるので、最終的には、

$$\begin{aligned} V &= 1 - 2 \left(\frac{1+v}{1-v} \right)^{-N} + \dots \\ &= 1 - 2(19)^{-N} + \dots \quad (6) \end{aligned}$$

となる。