ヒント

1.1 節

1.1.2　(b) サイズ最大の単純 2 部グラフは完全 2 部グラフであり，$K_{r,s}$ のサイズが rs であることに注意せよ．そして，もし $s-r \geq 2$ ならば，$K_{r+1,s-1}$ は $K_{r,s}$ よりもサイズが大きいことを示せ．あるいは別の方針として，$n^2/4 - r(n-r)$ が完全平方であり，それによって $n^2/4 - r(n-r)$ が非負となることを示せ．

1.1.7　(b) $e(Q_n)$ を決定するために定理 1.1 を適用せよ．

1.1.9　(a) 2 通りの方法で数えよ（証明手法を参照せよ）．

1.1.10　次数の上界を調べて，定理 1.1 を適用せよ．

1.1.11　これは演習 1.1.2 の一般化である．演習 1.1.2 と類似の証明手法を用いよ．

1.1.12　G が非連結ならば，V のある分割 (X, Y) に対して，G のどの辺も X の頂点と Y の頂点を結んでいない．もし $|X| = r$ かつ $|Y| = n-r$ ならば G のサイズの最大値はいくつか？

1.1.13　G が非連結ならば，大きさが $\lfloor n/2 \rfloor$ 以下のある集合 $X \subseteq V$ が存在して，G のどの辺も X の頂点と $V \setminus X$ の頂点を結んでいない．

1.1.15　$GF(2)$ 上のベクトルの集合が 1 次従属であるための必要十分条件は，その和が零ベクトルとなる部分集合を含まないことである．

1.1.16

(a)　必要性：定理 1.1 を適用せよ．
　　十分性：奇数である d_i の個数はいくつか？

(b)　必要性：定理 1.1 を適用せよ．
　　十分性：$(\sum_{i=2}^{n} d_i) - d_1$ に関する帰納法で示せ．

1.1.18　(b) 2 通りの方法で数えよ．$G = (V, E)$ とする．ただし, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ かつ $d(v_i) = d_i$ $(1 \leq i \leq n)$ である．$X := \{v_1,\ v_2, \ldots, v_k\}$ とおく．$v_i \in X$ に対して，v_i と $V \setminus X$ の頂点を結ぶ辺の本数の下界を調べよ．$v_i \in V \setminus X$ に対して，v_i と X の頂点を結ぶ辺の本数の上界を調べよ．一方の端点が X にあり，もう一方の端点が $V \setminus X$ にある辺の本数の上界と下界を決定せよ．

1.1.19　(a) 必要性を証明するために，まず初めに，G が単純グラフで，$u_1v_1, u_2v_2 \in E$

かつ $u_1v_2, u_2v_1 \notin E$ ならば，$(G \setminus \{u_1v_1, u_2v_2\}) + \{u_1v_2, u_2v_1\}$ が G と同じ次数列を持つことを示せ．そして，$\mathbf{d}$ がグラフ的ならば，頂点集合が $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ のある単純グラフ G が存在して，$d(v_i) = d_i$ $(1 \leq i \leq n)$ かつ $N(v_1) = \{v_2, v_3, \ldots, v_{d_1+1}\}$ を満たすことを示せ．

1.1.20　S 上のグラフを次のように定義せよ：S の点 x_i と x_j が隣接しているときかつそのときに限りそれらは距離 1 にある．このグラフにおいて最大次数はどれくらい大きくなれるか？

1.1.21

(a)　これは線形代数の古典的な結果であり，任意の実対称行列に対して正しい．

(b)　これは任意の整数正方行列 A に対して成り立つ．$\lambda := p/q$ が A の固有値であるとする．ただし，p と q は互いに素な整数である．$q > 1$ を仮定する．固有ベクトルのスカラー倍も固有ベクトルであるという事実を使って，λ に対応するある整数固有ベクトルが存在して，そのすべての成分が q で割り切れるとは限らないことを示し，矛盾を導け．

1.1.24　(a) $G = (V, E)$ が単純グラフの場合を考える．$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とする．固有値 λ に対応する G の固有ベクトルは，各頂点の近傍の重みの和がその頂点の重みの λ 倍となる V 上の重み関数と見なすことができる．$|x_j| := \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\} = 1$ を満たす λ の固有ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を選び，その頂点 v_j を考えよ．

1.2 節

1.2.14　(a) 演習 1.2.11 を使って，考えるべき場合の数を減らせ．

1.2.16

(c)　自己補グラフのサイズはいくつか？

(d)　G から $\overline{G}$ への自己同形写像は G の頂点の組を誘導する．それら頂点の次数について何が言えるか？

1.2.17　(b) G は頂点推移的ではないので，ある頂点 x と y に対して，G のどの自己同形写像も x を y に写さない．X と Y のそれぞれを x と y の軌道とする．x の近傍 z を考える．G が辺推移的であり，y が孤立点でないという事実を用いて，$z \in Y \setminus X$ であることを示せ．そして，(X, Y) が G の 2 部分割であることを示せ．

1.2.18　(b) Folkman グラフが頂点推移的でないことを示すために，それが 2 部的であることに注目せよ．一方の部集合の頂点が満たす性質で，もう一方の部集合の頂点は満たさないものを見つけよ．

1.2.20　演習 1.2.8 より，G の自己同形写像は $\mathbf{PAP}^t = \mathbf{A}$ を満たす置換行列 $\mathbf{P}$ と見

なすことができる．$\mathbf{P}^t = \mathbf{P}^{-1}$（なぜ？）という事実を用いて，$x$ が固有値 λ に対応する G の固有ベクトルならば，$\mathbf{Px}$ もそうなることを示せ．そして，G が異なる n 個の固有値を持ち，異なる固有値に対応する固有ベクトルが直交する（なぜ？）ことと，$\mathbf{P}$ が置換行列であるという事実を用いて，$\mathbf{Px} = \pm\mathbf{x}$ を示せ.

1.3 節

1.3.7 (b) 図 1.20 のグラフの 4 つの三角形それぞれに対して，その三角形の頂点を表す 3 つの区間の集合に (a) を適用せよ．そして，その 6 つの区間のうちの 1 つは他の 5 つの区間すべてと共有点を持たなければならないことを示せ.

1.3.15 (a) $|X| \geq |Y|$ と仮定し，すべての $xy \notin E$ に対して，以下が成り立つことを示せ：

$$\frac{1}{|X|(|Y| - d(x))} \geq \frac{1}{|Y|(|X| - d(y))}$$

そして，2 通りに数える論法を適用して，$|X| = |Y|$ であることを示せ.

1.3.17 (a)

(i) $L(K_4)$ の補グラフは位数 6 の 1-正則グラフである．この事実を使って，$\mathrm{Aut}(L(K_4))$ と $\mathrm{Aut}(K_4)$ が異なる位数を持つことを示せ.

(ii) $n \geq 3$ かつ $n \neq 4$ とする．K_n の自己同形写像は $L(K_n)$ の自己同形写像を誘導することを示せ．対称群 S_n は $\mathrm{Aut}(L(K_n))$ の部分群であることを導け．$L(K_n)$ の自己同形写像が K_n の隣接する辺を隣接する辺に写すことに注意して，$L(K_n)$ の各自己同形写像が K_n の自己同形写像によって誘導されることを示せ.

1.3.18 (c) 自己同形写像を除いて，位数 10 の群はちょうど 2 つ，具体的には $\mathbb{Z}_{10}$ と $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ が存在する．様々な場合分けを考えることで証明せよ（次の論文を参照せよ：Holton, D.A. and Sheehan, J. (1993). The Petersen Graph. Cambridge University Press, pp. 292–293）.

1.5 節

1.5.7 (a) $\mathbf{B}$ を M の $r \times r$ 部分行列とする．もし $r = 1$ ならば $\det \mathbf{B} = 0, \pm 1$ である．$r \geq 2$ とする．もし $\mathbf{B}$ が $\mathbf{0}$ の列を持つか，もしくは $\mathbf{B}$ の各列が 2 つの非零の成分を持つならば，$\det \mathbf{B} = 0$ である（なぜ？）．それ以外の場合は帰納法で示せ.

1.5.11 (b) xy を G のある固定された辺とする．まず初めに，順序対 (x, y) をその逆 (y, x) に写す G の自己同形写像は存在しないことを示せ．そして，G の各辺 uv

に対して，G の自己同形写像による順序対 (x,y) の軌道は 2 つの順序対 (u,v) と (v,u) のうちちょうど 1 つを誘導することを示せ．ここで，もし (u,v) が (x,y) の軌道に含まれていれば，辺 uv に u から v へ向き付けし，そうでなければ v から u へ向き付けすることで，有向グラフ $\overrightarrow{G}$ を得よ．G の各自己同形写像は $\overrightarrow{G}$ の自己同形写像でもあることを示せ．$\overrightarrow{G}$ が頂点推移的であり，有向正則であることを結論付けよ．G は，すべての頂点が偶次数の正則グラフであることを証明せよ．

1.5.12　$\mathbf{B}$ が交代行列であり，それによって n が奇数のとき $\det \mathbf{B} = 0$ となることを示せ．n が偶数のときは，錯乱順列（固定点を持たない S_n の置換）の個数 $d(n)$ が奇数である（実際は $n \geq 2$ に対して $d(n) = nd(n-1) + (-l)^n$ である）という事実を使って，$\det \mathbf{B} \neq 0$ となることを示せ．

2.1 節

2.1.2 (a) 非自明な極大道の端点を考えよ.

2.1.3 (a) もし G が次数 1 以下の頂点を持つならば，それを除去して帰納法を適用せよ.

2.1.4 (a) 極大道を考え，その道の 1 つの端点の近傍を考えよ.

2.1.5

(a) 極大道を考え，その道の 1 つの端点の近傍を考えよ.

(b) 帰納法を適用せよ.

2.1.6 極大道を考え，その道の 1 つの端点の近傍を考えよ.

2.1.8 (a) 2 つの隣接する頂点の近傍を考えよ.

2.1.9 頂点，その近傍，さらにその近傍の近傍を考えよ.

2.1.11 (a) 極大有向道の端点を考えよ.

2.1.12 最長有向道における弧を考えよ.

2.1.14 (a) G が正則であることを示せ．そして，頂点除去部分グラフにおける頂点の次数を考えよ.

2.1.17 (a) 最短の奇閉路を考えよ.

2.1.18 p 個の頂点の集合 X で，それによって誘導される部分グラフ $G[X]$ の最小次数ができるだけ大きいものを選ぶ．もし次数が q よりも小さい $G[X]$ の頂点 u が存在し，次数が $(k-1)q$ よりも小さい $G-X$ の頂点 v が存在するならば，集合 $(X \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ を考えて，k に関する帰納法を適用せよ.

2.1.19 C を $\mathrm{KG}_{m,n}$ の最短の奇閉路とする．$(n-2m)$-集合 $S \setminus (x \cup y)$ の和が n-集合 S 全体となることを示せ．ただし和は $xy \in E(C)$ を満たす辺 xy すべてにわたる.

2.1.22 P の極小元の集合を考える．それらが反鎖を形成することを示し，それらを削除して，$|X|$ に関する帰納法を適用せよ.

2.1.23 (a) G における次数 3 以上の任意の頂点が次数 1 の近傍を持つことを示し，n に関する帰納法を適用せよ.

2.2 節

2.2.11 2 つの非隣接な頂点間の最短道を考えよ.

2.2.18 (a) 背理法で示せ．G を最小反例とする．G の内周が 5 以上であり，$\delta \geq 3$ であることを示せ．$n \leq 8$ を導け．そして，そのようなグラフが存在しないことを結論付けよ.

2.2.19 G は連結であると仮定してよい（なぜ？）．$\delta \geq 3$ と $\delta \leq 2$ の場合を考え，帰納法を適用せよ．

2.2.20 (a) G は $G-x$ が連結となる奇次数の頂点を持つか，または，G は $G-\{x,y\}$ が連結となる辺 xy を持つことを示し，帰納法を適用せよ．

2.2.21 (b)「証明」は「定理」の仮定を満たすグラフのすべてを考慮しているか？

2.2.25 次のようにして，頂点集合が S の単純グラフを構成せよ：S の 2 点が隣接するときかつそのときに限りそれらの距離がちょうど 1 となる．このグラフにおいて次数 3 以上の任意の頂点が次数 1 の近傍を持つことを示し，帰納法を適用せよ．

2.2.27 G の位数 k の誘導部部分グラフすべてが l 本の辺を持つとする．任意の 2 つの頂点 v_i と v_j に対して，以下を示せ：

$$e(G) - d(v_i) = e(G - v_i) = l\binom{n-1}{k} \Big/ \binom{n-3}{k-2}$$

$$e(G) - d(v_i) - d(v_j) + a_{ij} = e(G - v_i - v_j) = l\binom{n-2}{k} \Big/ \binom{n-4}{k-2}$$

ただし a_{ij} は，v_i が v_j に隣接しているかそうでないかによって，1 または 0 をとる．a_{ij} が i と j に依存しないことを導け．

2.4 節

2.4.6 (a) 頂点に $0, 1, 2, \ldots, 2n$ のラベルを付けよ．頂点 $1, 2, \ldots, 2n$ を 0 を中心とする円周上に並べよ．円 $(0, 1, 2, 2n, 3, 2n-1, 4, 2n-2, \ldots, n+2, n+1, 0)$ とその回転を考えよ．

2.4.7 G によって図 2.7 のグラフを表し，P_1 と P_2 によって内部と外部の五角形を表す．G のどの閉路も 2-閉路でない閉路分解 $\mathcal{C}$ が存在すると仮定する．このとき，各 $C \in \mathcal{C}$ に対して $|E(C) \cap E(P_i)| = 2$ $(i = 1, 2)$ を示せ．そして偶奇性に基づき矛盾を導け．

2.4.9 その有向グラフの頂点の任意の線形順序付けを考えよ．

2.4.10 (a) $P := \{v_1, \ldots, v_n\}$，$\mathcal{L} := \{L_1, \ldots, L_m\}$ とおき，$\mathbf{M}$ の j 列目を $\mathbf{m}_j$ によって表し，ベクトル $\mathbf{x}_i := \sum\{\mathbf{m}_j : v_i \in L_j\}$ と $\mathbf{y}_i := \sum\{\mathbf{m}_j : v_i \notin L_j\}$ $(1 \leq i \leq n)$ を考えよ．$\mathbf{x}_i$ は第 i 成分が $d_i := d(v_i)$ で，他のすべての成分が 1 であり，$\mathbf{y}_i$ は第 i 成分が 0 で，第 k 成分 $(k \neq i)$ が $d_k - 1$ であることを示せ．$\mathbb{R}^n$ の各単位ベクトルを $\mathbf{x}_i$ と $\mathbf{y}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ の 1 次結合で表せ．

2.5 節

2.5.1 (a) 2 通りの方法で数えよ．X の頂点に対応する行からなる接続行列 $\mathbf{M}$ の部分行列を考えよ．

2.6 節

2.6.6 もし G が偶ならば，$X := V$ とおく．そうでなければ，n に関する帰納法で示せ．v を G の奇次数の頂点とする．部分グラフ $G[N(v)]$ をその補グラフに置き換えることで，$G - v$ から得られるグラフを考えよ．

2.7 節

2.7.1 Kelly の補題 (2.20) を使って，欠けている頂点除去部分グラフにおける様々なタイプの部分グラフの個数に対する制約を得よ．

2.7.3 (b) 木は連結で無閉路的なグラフである．長さ 8 の道を含む位数 11 の木を探せ．

3.1 節

3.1.1　最短 xy-歩道を考えよ.

3.1.2　k に関する帰納法を用いよ.

3.1.8　x を次数 $n-2$ の頂点，y を x と非隣接な頂点とし，X と Y をそれぞれ，x と y の近傍の集合とする．集合 $X \setminus Y$ を考えよ.

3.2 節

3.2.3　(a) 2.5 節の定理を見直せ.

3.2.4　背理法で示せ．切断辺が存在すると仮定して，それを除去し，その結果得られた部分グラフの頂点の次数を考えよ.

3.3 節

3.3.5　X がその近傍の集合となる新しい頂点を加えよ.

3.3.7　もし $G-v$ が閉路 C を含むならば，v を含む $G \setminus E(C)$ の成分の適切なオイラー周遊を考えよ．もし $G-v$ が無閉路的ならば，Q をオイラー周遊ではない G の v-小径とする．$G \setminus E(Q)$ がちょうど 1 つの非自明な成分を持つことを示せ.

3.3.9　$W := v_0e_1v_1e_2v_2 \ldots e_mv_m$ をグラフ G のオイラー周遊とする．ただし，$v_m = v_0$ である．$v_i = v_0$ $(0 < i < m)$ のとき，$v_0Wv_ie_mv_{m-1}\overleftarrow{W}v$ も G のオイラー周遊であることを示せ.

3.4 節

3.4.7　同じ頂点集合上で定義された適切な有向グラフに Rédei の定理 (2.3) を適用せよ.

3.4.11　(b) D は強連結で，奇閉路 $v_1v_2 \ldots v_{2k+1}v_1$ を含むとする，もし $(v_i, v_{i+1}) \in A$ ならば，$P_i := (v_i, v_{i+1})$ とおき，もし $(v_i, v_{i+1}) \notin A$ ならば，P_i を有向 (v_i, v_{i+1})-道とする．もし各道 P_i の長さが奇数ならば，(a) を適用せよ.

3.5 節

3.5.4　(b) 閉路 C_1，C_2，C_3 の間の対称差を可能な限りすべて考えよ．

3.5.7　m に関する帰納法で示せ．もし G が大きさ 2 の辺切断を持つならば，これらの辺のうち 1 本を縮約せよ．そうでなければ，G の各辺除去部分グラフに対して帰納法の仮定を適用し，それによって得られた m 個の一様閉路被覆のコピーを適切な数だけ考えて，それらを組合せよ．

3.5.8　(a)(i) 十分性を証明するために，G が大きさ 1 または 2 の辺切断を持たない場合に帰着させ，G の各辺除去部分グラフに対して演習 3.5.7 を適用せよ．以下で定義されたベクトル $\mathbf{u}_e$ $(e \in E)$ が $\mathbf{F}_{\mathcal{C}}$ のベクトルの 1 次結合となる正の整数 r を得よ．

$$\mathbf{u}_e(f) := \begin{cases} 0 & f = e \\ r & f \in E \setminus e \end{cases}$$

4.1 節

4.1.4　F の各成分を別々に考えよ．

4.1.7　十分性を証明するために，成分数が最小となる，次数列が $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ のグラフ G を考えよ．もし G が非連結であれば，（演習 1.1.19 のヒントのように）辺の適切な交換によって，同じ次数列を持ち，G より成分数の少ないグラフが存在することを示せ．

4.1.14　(b) 次のようにして 2 部グラフ $B(X, Y)$ を構成せよ：$X := \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ はピザの集合で，$Y := \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ は学生の集合であり，ピザ x_i の一部を学生 y_i に割り当てるとき x_i と y_i を辺で結ぶ．B の成分数が d 以下となることを示せ．

4.1.15　その根を除去して，n に関する帰納法を用いよ．

4.1.19　(a) T を木とする．帰納法によって，T の任意の指定された辺 $e = xy$ を通る T^3 内のハミルトン閉路が存在するを示せ．$T \setminus e$ の 2 つの成分の中からそれぞれ適切な辺を選び，帰納法の仮定を適用せよ．

4.2 節

4.2.5

(a)　$F_n := P_{n-1} \vee K_1$ から，K_1 の頂点と P_{n-1} の一方の端点を結ぶ辺を 2 重にすることで得られるグラフを F'_n で表す．$f_n := t(F_n)$，$f'_n := t(F'_n)$ とおく．命題 4.9 を適用して，これら 2 つの関数を含む 2 つの漸化式を導け．$f_n - 3f_{n-1} + f_{n-2} = 0$ を示して，この漸化式を解け．

(b)　W_n からスポークを除去することで得られるグラフを W'_n で表す．$w_n := t(W_n)$，$w'_n := t(W'_n)$ とおく．W_n の各スポークはどれも同じ個数（a_n 個）の全域木に属する．同様に，W_n のスポーク以外の各辺はどれも同じ個数（b_n 個）の全域木に属する．a_n，b_n，w_n，w'_n，f_n の間の 3 つの関係式を見つけよ．そして，命題 4.9 を W'_n の適切な辺に適用することで，これらの間のもう 1 つ別の関係式を得よ．4 つの関係式から $w_n - W_{n-1} = f_n + f_{n-1}$ を導き，(a) を適用することで，w_n に対する漸化式を得よ．

4.2.11　頂点集合が $\{1, 2, \ldots, n\}$ の各標識木 T に対して，列 $(j_1, j_2, \ldots, j_{n-2})$ を付随させよ．ただし，j_1 は $T_1 := T$ における T_1 の最小ラベルの葉 i_1 の近傍であり，j_2 は $T_2 := T_1 - i_1$ における T_2 の最小ラベルの葉 i_2 の近傍であり，$\cdots$，j_{n-2} は $T_{n-2} := T_{n-3} - i_{n-3}$ における T_{n-2} の最小ラベルの葉 i_{n-2} の近傍である．

4.2.12

(a) 多項係数は次の漸化式を満たす.

$$\binom{n}{d_1, d_2, \ldots, d_k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{n-1}{d_1, \ldots, d_i - 1, \ldots, d_k}$$

位数 2 以上の各木が次数 1 の頂点を持つという事実を用いて, $t(n; d_1, d_2, \ldots, d_n)$ が上記と類似した漸化式を満たすことを示し, n に関する帰納法を適用せよ.

(b) 多項定理は

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum \binom{n}{d_1, d_2, \ldots, d_k} x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_k^{d_k}$$

である. ただし, 和は n の k 個の非負整数への分割 $d_1, d_2, \ldots, d_k$ すべてにわたる. $(\sum_{i=1}^{n} 1)^{n-2}$ の展開を考えよ.

4.2.13 $K_{m,n}$ の大きさが m の部集合に属す頂点を**赤点**, 残りの n 個の頂点を**青点**と呼ぶ. 赤点が根となる $K_{m,n}$ の各全域木は, 各成分が赤点を根とするスターからなる全域林 F と, 赤点と青点を結ぶ $m-1$ 本の辺の集合 S の和であることを示せ. F と S の選び方はいくつかあるか?

4.3 節

4.3.9 C を G のハミルトン閉路とし, e を C の辺とする. $T := C \setminus e$ に対して系 4.12 を適用せよ.

4.3.10 系 4.12 を適用せよ.

5.1 節

5.1.1　非自明な極大道の端点を考えよ.

5.1.4　X の各頂点と隣接する新しい頂点 x を追加し，Y の各頂点と隣接する新しい頂点 y を追加せよ．演習 5.1.1 と定理 5.1 を適用せよ.

5.1.5　C_1 と C_2 を 2 つの最長閉路とする．$X := V(C_1)$ かつ $Y := V(C_2)$ として，演習 5.1.4 を適用せよ.

5.2 節

5.2.3　$\overset{C}{\sim}$ が推移律を満たすことを示すために，G の 3 本の辺 e，f，g を考える．C_1 を e と f を含む閉路，C_2 を f と g を含む閉路とする．$C_1 \cup C_2$ が非分離的であることを示し，定理 5.2 を適用せよ.

5.2.5　ある閉路の辺はすべて，そのグラフのある 1 つのブロックに含まれていることを示せ．そして，(a) に対して定理 2.7 を，(b) に対して定理 4.7 を使え.

5.2.7　(a) もし G が 2 部グラフでないならば，そのグラフは奇閉路 C を含む．$X := \{x, y\}$，$Y := V(C)$ として，演習 5.1.4 を適用せよ.

5.2.8　(b) G のブロックの個数に関する帰納法を用いよ．G が分離可能であれば，G の分離 $\{G_1, G_2\}$ を考えて，G_1 と G_2 に帰納法の仮定を適用せよ.

5.2.10　位数 4 のそのようなグラフが存在する.

5.2.11　$G \setminus e$ にはいくつ端ブロックがあるか？

5.2.12　(a) G を偶グラフとする．n に関する帰納法で示せ．G はループを持たないと仮定してよい（なぜ？）．頂点 v を考えよ．辺切断 $\partial(v)$ の辺をペアに分割し，これらのペアをすべて切り離すと，位数 $n-1$ かつサイズ $m - \frac{1}{2}d(v)$ の偶グラフが得られる.

5.3 節

5.3.2　演習 5.2.11 を適用せよ.

5.3.3　どの奇閉路も耳を持たないことを示せ.

5.3.4　G が閉路であるとき，その命題が正しいことを示せ．そして，G の耳分解の耳の数に関する帰納法を用いよ.

5.3.7　G の耳分解において最後の耳 P を考え，耳の個数に関する帰納法で示せ.

$X \cup Y$ における P の内点の個数による場合分けをして考えよ．

5.4 節

5.4.4　定理 5.13 を用いて，演習 5.3.8 と同じ方針で考えよ．

6.1 節

6.1.1 $\ell(v)$ に関する帰納法を用いよ.

6.1.7 もし T が（x が根である）DFS-木でなければ，G に交差辺（T の 2 つの親類でない頂点を結ぶ辺）が存在する．この辺を使って，T の選び方に矛盾する全域 x-木を見つけよ.

6.1.9 (a) $\rho(T_v) := \sum_{u \in V \setminus \{v\}} d(u,v)$ とおく．$\sigma(T_v) \leq (n-1)\rho(T_v)$ と $\sum_{v \in V} \rho(T_v) = 2\sigma(G)$ を示せ.

6.1.11 P を G のハミルトン道とする．P を G のハミルトン閉路に拡張することができ，そしてもし xy が C の弦であれば，x^+y^+ と x^-y^- のどちらも C の弦であることを示せ．さらに，もし xCy の長さが 4 以上であれば，$x^{++}y$ と x^+y^- のどちらも C の弦であることを示せ．このとき C は，xCy の長さが 2 となる，弦 xy を持つかどうかを考えよ.

6.2 節

6.2.1 T_1 と T_2 を 2 つの G の最適木とする．その辺 e を適切に選び，演習 4.3.2 を適用せよ.

6.2.5 $\log \alpha\beta = \log \alpha + \log \beta$ という事実を用いよ.

6.2.6 (a) T_2 を最大の辺重みが T における最大の辺重みより小さい全域木とする．T の辺 e を適切に選び，$T_1 = T$ として演習 4.3.2 を適用せよ.

6.3 節

6.3.7 関数 l に依存した適切な順序における頂点を出力せよ.

6.3.8 関数 f に依存した適切な順序における頂点を出力せよ.

6.3.13 (b) G において，道 P の一方の端点が根となる，P を含む DFS-木を考えよ．それに従って G の向き付けを与えよ.

7.1 節

7.1.1　(a) $\{\partial^+(v) : v \in V\}$ と $\{\partial^-(v) : v \in V\}$ がどちらも弧集合 A の分割であることを示せ.

7.1.2　(a) X にちょうど 1 つの端点をもつ弧は，2 つの集合 $\cup\{\partial^+(v) : v \in X\}$ と $\cup\{\partial^-(v) : v \in X\}$ のうちちょうど 1 つに現れて，X に 2 つの端点をもつ弧はこれらの集合のどちらにも現れる.

7.1.4　定理 3.6 を用いよ.

7.2 節

7.2.3　適切に調整することで，すべての容量を整数にすることができる.

7.2.4　もし f が非零フローならば，f-正弧の集合を考えよ.

7.3 節

7.3.1　(a) 演習 7.1.2 を用いよ.

8.1 節

8.1.3　演習 5.2.7 を参照せよ.

8.1.4　2 つの木の中心の間の写像から始めよ（演習 4.1.8b 参照）．そして，2 つの根付き木が同型かどうかを決定する再帰的アルゴリズムを使え.

8.2 節

8.2.1　図 8.2 に示した頂点分裂の操作を用いて，問題 8.5 を問題 7.10 に帰着させよ.

8.3 節

8.3.5　(a) 図 8.2 で示したような頂点分裂の操作を用いて，弧ではなく，長さ 2 以上の道を挿入せよ.

8.3.9　f の各節に 3 つのリテラルがあるので，各節にはとりうる値の 8 つの 3 つ組が存在し，そのうちの 7 つでその節は充足される.

8.3.10　(a) 形式 $x \vee \bar{x}$ の節は存在しないとしてよい．グラフ $G = (V, E)$ を次のように構成する：頂点集合 V を f のリテラルの集合とし，f の各節 $x \vee y$ に対して x と y を辺で結び，V に含まれているリテラルの各組 $\{x, \bar{x}\}$ に対して x と $\bar{x}$ を辺で結ぶ．後者の辺の集合を M とする.
任意の頂点を根として選び，その根から $E \setminus M$ と M の交互道によって到達可能な G のすべての頂点を含むように木 T を成長させよ．根が赤となるように，T の頂点を赤と青に交互に着色せよ．もし $V(T) \neq V(G)$ ならば，$G - V(T)$ において，そのような別の木を成長させて，G の全域林が構成されるまでこれを続けよ．各赤点には値 0 が割り当てられて，各青点には値 1 が割り当てられる真理値割り当てを考えよ.

8.4 節

8.4.3　ハミルトン閉路問題からの多項式時間帰着を見つけよ.

8.6 節

8.6.7 $G[X,Y]$ から $D(x,y)$ を得るために，2 つの新しい頂点 x と y を追加して，x と X のすべての頂点を辺で結び，y と Y のすべての頂点を辺で結ぶことによって得られるグラフに適切な向き付けを与えよ．

9.1 節

9.1.2　$G \vee H$ の任意の頂点切断は $V(G)$ か $V(H)$ を含まなければならないことを示せ.

9.1.3　(a) もし G が完全でなければ，G の頂点切断 S と $G - S$ の最小成分を考えよ．そのような成分において，頂点の次数はどの程度まで大きくなれるか？

9.1.4　もし G が完全でなければ，G の頂点切断 S と $G - S$ の最小成分を考えよ．そのような成分において，頂点の次数はどの程度まで大きくなれるか？

9.1.6　G の最長閉路の辺を考えよ.

9.1.7　各ループが除去可能であり，多重辺の集合の各リンクが除去可能であることを示せ．そして，演習 5.3.2 を用いよ．縮約可能な辺は，$\kappa(G/e) = \kappa(G)$ である辺ではなく，G/e が 2-連結となる辺 e を意味することに注意せよ.

9.1.8　S を G の極小頂点切断とする．S の各頂点が $G - S$ の各成分の少なくとも 1 つの頂点と隣接していることを示せ．$G - S$ の異なる成分における 2 つの頂点で，G において距離が 2 であるものが存在することを導け.

9.1.10　(a)

(i)　m に関する帰納法を用いよ．G/e が極小 2-連結であるかそうでないかで，2 つの場合を考えよ．ただし $e \in E$ である．後者の場合，G/e の任意の辺 f に対して $(G/e) \setminus f = (G \setminus f)/e$ であるという事実を用いて，e が次数 2 の頂点に接続していることを示せ.

(ii)　(i) のように証明せよ．もし任意の $e \in E$ に対して G/e が極小 2-連結でなければ，G の各辺が次数 2 の頂点に接続していることを示し，数え上げの手法を適用せよ.

9.1.13　P の長さに関する帰納法を用いよ.

9.2 節

9.2.2　最短奇閉路 C および C 上にない頂点から $V(C)$ への 3-扇を考えよ.

9.2.4　外面の次数が 4 以上である 5-連結平面グラフ G を見つけて，4 つの頂点 x_1，y_1，x_2，y_2 をこの面の境界に適切な順番で配置せよ.

9.3 節

9.3.3 $\partial(X)$ を G の最小辺切断とする．G の直径が 2 であることを使って，$d(X) \geq |X|$ または $d(X) \geq |V \setminus X|$ であることを導け．一般性を失うことなく，前者が成り立つとしてよい（なぜ？）．そして，定理 2.9 と演習 9.3.2a を適用して，$d(X) = \delta$ であることを導け．

9.3.4 $\partial(X)$ を G の最小辺切断とする．一般性を失うことなく，$|X| \leq n/2$ であるとしてよい（なぜ？）．$|X| \leq \delta$ であることを示せ．そして，定理 2.9 と演習 9.3.2a を適用して，$d(X) = \delta$ であることを導け．

9.3.5 $\kappa = 0, 1, 2, 3$ によって場合分けをして考えよ．

9.3.12 $G := G(x, y)$ を 2 つの特別な頂点 x と y を持つグラフとする．2 つの新しい頂点 x' と y' を追加して，x' と x，y' と y をそれぞれ辺で結ぶことで，G から G' を構成せよ．そして，$H := H(u, v)$ を G' の線グラフとする．ただし，u と v はそれぞれ，G' の辺 xx' と yy' に対応する．G の辺素な xy-道の最大本数は H の内素な uv-道の最大本数と等しいことを示せ．

9.4 節

9.4.7 もし G/e が 3-連結でなければ，H を最小次数 3 以上のグラフで，$G \setminus e$ が H の細分となるものとする．H の任意の異なる 2 つの頂点が 3 本の内素な道によって結ばれていることを示せ．

9.4.8 C. Thomassen が定理 9.10 からどのようにしてこの定理（Tutte の車輪定理）を導くことができるかを示している．G が極小 3-連結である，つまりすべての $e \in E$ に対して $\kappa(G \setminus e) = 2$ であると仮定する．定理 9.10 によって，G は G/e が 3-連結となる辺 e を含む．G/e が単純でない，つまり e は三角形に含まれているとする．まず初めに，その三角形の 2 つ以上の頂点が次数 3 であることを示せ．それによって，G は長さ 1 の道を含み，それらの頂点は (i) 次数が 3 であり，そして (ii) 共通近傍を持つ．ここで，これら 2 つの性質を持つ G の最長道を考えよ．この道の両端点は隣接していて，G は他に頂点を持たないことを示せ．G が車輪であると結論付けよ．

9.4.9 (a) $\mathcal{G}$ のどのグラフも 2 個の点素な閉路を持たないが，辺を追加するか，または，次数が 4 以上の頂点を切り離すことによって $\mathcal{G}$ のグラフから得られる任意の単純グラフは，2 個の点素な閉路を含む 3-連結グラフであるか，$\mathcal{G}$ の別のグラフとなることを示せ．演習 9.4.8 を使って，サイズに関する帰納法で所望の結果を証明

せよ．

9.5 節

9.5.3　$k = 8$ に対する例を 14 章の図の中に見つけることができる．この例を一般化して，すべての $k \geq 5$ に対する例を得よ．

9.5.6　x と y を G において奇次数の 2 つの頂点とする．$G + xy$ の均衡向き付けを考えよ．

9.5.8　(b) G が極小 $2k$-辺連結でないならば，G から辺を除去することで，より小さいサイズの $2k$-辺連結グラフを得ることができる．一方，G が極小 $2k$-辺連結ならば，演習 9.3.15 によって，G は次数が $2k$ の頂点を持つ．ここで，定理 9.16 を用いよ．

9.6 節

9.6.3

(a)　(i)　X が奇次数の頂点を奇数個含むか偶数個含むかによって，$d(X)$ が奇数または偶数となることを示せ．特に，大きさが奇数の辺切断は奇次数の頂点のある組を分離する．

(ii)　$d(X)$ が偶数であるとする．偶奇性と劣モジュラ性を用いて，$\partial(X)$ と交差しない大きさが奇数の最小辺切断 $\partial(Y)$ が存在することを示せ．

(b)　(a) より，Gomory–Hu のアルゴリズムによって決定される $n - 1$ 個の切断のうち大きさが奇数の最小辺切断は，G の大きさが奇数の最小辺切断である．

9.7 節

9.7.2　単体的分解におけるクリークの列の長さに関する帰納法を用いよ．

9.7.3　グラフの位数に関する帰納法を用いよ．

9.7.4　(a) T の 2 つの素な部分木 T_i と T_j で，それぞれの木がそれら 2 つとは異なる部分木 T_k と交差するものを考えよ．T_k は T において T_i と T_j を結ぶ道を含むことを示せ．

10.1 節

10.1.5　まず初めに，G は 3-連結であると仮定できることを示せ．次に，定理 9.6 を適用して，全域部分グラフではない長さが 3 以上の閉路 C を得よ．最後に，扇補題 (9.5) を適用せよ．

10.1.6　次数および頂点の数を数えよ．このグラフに見覚えはないか？

10.1.7　背表紙に沿って頂点を配置せよ．

10.1.8　(c) Petersen グラフの交差数が 2 以上であることを示すために，Petersen グラフが辺推移的であることを使って，演習 10.1.3(a) を用いよ．

10.1.9　$G := K_{n+1}$ の，ちょうど $\mathrm{cr}(K_{n+1})$ 個の交差を持つ描画 $\widetilde{G}$ を考えよ．K_n と同型な，$\widetilde{G}$ の部分グラフの交差数の平均値を求めよ．

10.1.10　そのグラフの最適描画における交差辺の組を考えよ．

10.1.12　与えられた曲線の 2 つの異なる点 (p, p^2, p^3) と (q, q^2, q^3) を結ぶ線分を考える．(x, y, z) をその線分上のその 2 点とは異なる点とする．$x^2 - y \neq 0$ を示せ．その曲線のどの 3 点も一直線上にないことを示せ．$(xz - y^2)/(x^2 - y)$ を計算せよ．(p, p^2, p^3) と (q, q^2, q^3) を結ぶ線分と，(r, r^2, r^3) と (s, s^2, s^3) を結ぶ線分は（ただし p, q, r, s は異なる），$pq = rs$ であるときのみ交わることができることを示せ．グラフの頂点を配置するための点を適切に選べ．

10.2 節

10.2.4　演習 10.2.2 を使え．

10.2.11　演習 10.2.12a を使え．

10.2.15　$v(H)$ に関する帰納法を用いよ．T がスターであり，H が車輪であるときが帰納法の基礎となる．もし T がスターではないならば，1 つの頂点を除きすべての近傍が葉である T の頂点を考えよ．

10.3 節

10.3.1　G から平面的グラフを得るためにどれくらいの辺を除去しなければならないか？

10.3.2　系 10.21 の証明を見よ．

10.3.3　全域木には，どれくらいの本数の辺が存在するか？

10.3.4

(a) K_n はどれくらいの本数の辺を持つか？

(b) 位数 8 の自己補平面グラフで，自己双対でもあるものが存在する．

10.3.5 (a) オイラーの公式を用いよ．

10.3.8 (a)(i) オイラーの公式を用いよ．

10.3.9 (a) 適切な平面的グラフを構成せよ．

10.3.10 適切な平面的グラフを構成せよ．

10.4 節

10.4.1 命題 10.5 を用いよ．

10.4.4 演習 9.4.6 と定理 10.28 を適用せよ．

10.5 節

10.5.3 (b) K_5 をマイナーとして得るのに必要な縮約の回数に関する帰納法を用いよ．

10.5.5 定理 10.35 の証明を改良せよ．

10.5.6 正と負の x 軸と y 軸に沿って頂点を配置せよ．

11.1 節

11.1.2　平面双対を用いよ.

11.1.3　色の集合として $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ を取れ.

11.1.4　色の集合として $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ を取れ.

11.1.7　(a) 演習 11.1.6d を適用せよ.

11.1.8

(a)　xy を三角形分割 $G = (V, E)$ の辺とする．$c(x) = 0$ と $c(y) = 1$ を満たす一意的 3-彩色 $c : V \to \mathbb{Z}_3$ が存在することを示せ.（定理 21.5 も参照せよ.）

(b)　各平面グラフ G は，オイラー平面三角形分割となる拡大グラフ H を持つことを示せ.（実際は，G の与えられた 3-彩色 c に対して，次を満たすオイラー平面三角形分割 H を見つけることができる：$G \subseteq H$ であり，かつ H のある 3-彩色 c' に対して，c は c' の $V(G)$ への制限となる.

12.2 節

12.2.4 Turán の定理 (12.7) の証明の下の注意を参照せよ.

12.2.5 Turán の定理 (12.7) の証明を参照せよ.

12.2.7 (a) G が三角形を含まないとする．G における最短奇閉路 C を選ぶ．$V(G) \setminus V(C)$ の各頂点が C の多くとも 2 つの頂点と結ばれていることを示せ．Mantel の定理（演習 2.1.16）を $G - V(C)$ に適用して，矛盾を得よ.

12.2.8 (b) Cauchy–Schwartz の不等式を適用せよ.

12.2.9 (a) 演習 12.2.7 を利用して，再帰的に三角形の辺を除去し，結果として得られるグラフが (i) 2 部グラフとなるか，(ii) $\left\lfloor \frac{1}{4}(n-1)^2 \right\rfloor + 1$ 本以下の辺を持つようにせよ．(i) の場合，G が単純かつ 2 部的ならば，同じ部集合の任意の 2 つの頂点が $m - \frac{1}{4}(n-1)^2$ 個以上の共通近傍を持つことを示すことで結論を得よ.

あるいは別の方針として次のように考えよ．もし G の各辺が三角形上にあれば $t(G) > n^2/12$ であり，それによって $t(G) > \lfloor n/2 \rfloor$ となることを示せ．もし G のある辺が三角形上になければ，演習 12.2.7a を使って $G - \{x, y\}$ に帰納法を適用せよ．そしてさらに，$G - \{x, y\}$ が 2 部グラフでないことを示すことで，x か y のどちらかは三角形に属していることを示せ.

12.2.10 (a) グラフが $K_{2,k}$ を含むための必要十分条件は，そのグラフが共通近傍のペアを持つ k 個の頂点を持つことである．鳩ノ巣原理を適用せよ.

12.3 節

12.3.7

(b) $\delta \geq m-1$ である任意の単純グラフ G が位数 m の各木を含むことを示せ.

(c) n に関する帰納法と「$\delta \geq m-1$ である任意の単純グラフ G が位数 m の各木を含む」ことを用いよ.

12.3.8 (a)(ii) $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ を $[1, s_n - 1]$ の分割とする．$B_i := \{a + 2s_n - 1 : a \in A_i\}$, $C_i := A_i \cup B_i$ $(1 \leq i \leq n)$, $C_{n+1} := [s_n, 2s_n - 1]$ とおく．$(C_1, C_2, \ldots, C_{n+1})$ が解を持たない $[1, 3s_n - 2]$ の分割であることを示せ.

12.3.11 集合 $U = \{u_1, u_2, \ldots\}$ 上の可算無限完全グラフの 2-辺着色が **canonical** であるとは，任意の定数 $i \geq 1$ に対して，すべての辺 $u_i u_j$（ただし $j > i$）が同じ色を持つことである．まず初めに，$V(K) = \{v_1, v_2, \ldots\}$ である任意の可算無限完全グラフ K の 2-辺着色 c が与えられたとき，V のある可算無限部分集合 $U = \{u_1, u_2, \ldots\}$ が存在して，c のその部分グラフ $K[U]$ への制限が canonical で

あることを示せ．そして，canonical であるように 2-辺着色された可算無限完全グラフが単色無限完全部分グラフを含むことを示せ．

12.3.12　z を V の凸包の境界上の頂点とする．z を通るが G の他の頂点を通らない各直線 L は $V \setminus \{z\}$ を 2 つの部分集合 X_L と Y_L に分割する．X_L と Y_L がどちらも空でないそのようなすべての直線 L を考えて，$G[X_L \cup \{z\}]$，$G[Y_L \cup \{z\}]$，$G[V \setminus \{z\}]$ に帰納法を適用せよ．

13.1 節

13.1.3

(a)　$P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i)$ に注意して，包除公式 (2.3) を適用せよ．

(b)　(a) を用いよ．

13.1.4　$|I \setminus S|$ に関する帰納法を用いよ．

13.2 節

13.2.2　(a) $|I|$ に関する帰納法を用いよ．

13.2.4　完全グラフは多くの交差を持つ．

13.2.8　(a) 与えられた頂点の線形順序付けが有向ハミルトン道である確率はいくらか？

13.2.11　(a)(i) 演習 13.2.1 の不等式を用いよ．

13.2.18　(b) G と H をそのような 2 つのグラフとする．$V(G) = V(H) = \mathbb{N}$ としてよい．同形写像 $\theta : G \to H$ を，一度に 1 つの頂点ずつ再帰的に構成する．最初に，$\theta(1) = 1$ と定義する．θ が $\mathbb{N}$ の有限集合 S 上で定義されているとする．i を S に含まれていない最小の整数とする．与えられた性質を使って，θ を $S \cup \{i\}$ に拡張できる頂点 $j \in \mathbb{N} \setminus T$ が存在することを示せ．ただし $T := \theta(S)$ である．同様にして，θ^{-1} を $T \cup \{j\}$ から $T \cup \{j, k\}$ へ拡張することができることを示せ．ただし k は $T \cup \{j\}$ に含まれていない最小の整数である．

13.3 節

13.3.5　V のランダム 2-着色を考えよ．

13.3.6　ランダムトーナメントを考えよ．

13.4 節

13.4.2

(b)　Markov の不等式を適用せよ．

(c)　Chebyshev の不等式を適用せよ．

13.4.3

(a) Cayley の公式（定理 4.8）を適用せよ.

(b) 演習 13.4.2 を用いよ.

(c) Chebyshev の不等式を適用せよ.

14.1 節

14.1.1　このグラフの独立数はいくつか？対称性を利用することですべての最大独立集合を決定せよ．そのグラフの頂点集合を 3 つの最大独立集合の和として表現することができるか？

あるいは別の方針として次のように考えよ．5-閉路の任意の 3-彩色において，1 つの色はちょうど 1 つの頂点に割り当てられ，残り 2 つの色はそれぞれ 2 つの頂点に割り当てられる．そのグラフの 5-閉路を選び，そのどの 3-彩色もグラフ全体の 3-彩色に拡張することができないことを示せ．対称性を利用することで場合分けの数を減らして，それを確認せよ．

14.1.2　G が 2-連結でなければ，G の切断点を考えて，ブロックの個数に関する帰納法を適用せよ．

14.1.3　(a) もしある色に対してそのような頂点が存在しなければ，この色が必要ないことを示せ．

14.1.4　S_i を G_i に対する色の集合とするとき $(i = 1, 2)$，集合 $S_1 \times S_2$ による G の彩色を見つけよ．

14.1.5　(c) n に関する帰納法を用いよ．

14.1.6　下界に関しては，14.1 節の不等式の 1 つを適用せよ．上界に関しては，n-集合 S の固定された元を含む m-集合が，S の $(2m-1)$-部分集合に含まれている m-集合と同じように，$\mathrm{KG}_{m,n}$ において独立集合を形成することを示せ．

14.1.7　演習 1.1.11 を適用せよ．

3 刷以降原著者の意向により，演習問題 14.1.8 を演習問題 14.1.23 の前に移動させ，発展問題とした．移動に際して，次の演習問題の番号が変更となるため，該当のヒントを探す際には注意いただきたい．（初版，2 刷）14.1.8 →（3 刷以降）14.1.22,（初版，2 刷）14.1.9〜14.1.22 →（3 刷以降）14.1.8〜14.1.21.

14.1.8　G の χ-彩色におけるそれらの色に関して G の頂点を順序付けせよ．

14.1.9

(a)　それらの次数に関して G の頂点を順序付けせよ．

(b)　$k := \max\{\min\{d_i + 1, i\} : 1 \le i \le n\}$ とする．$d_k \ge k-1$ を示して，定理 1.1 を適用せよ．

14.1.10　(a) 14.1 節における不等式のうち 2 つを使え．

14.1.11　G は連結としてよい（なぜ？）．G の DFS-木 T を考えよ．任意の深さの頂点集合が独立集合を形成することを思い出せ．

14.1.12　(b) $\alpha(C_5[K_3])$ を考えることで，$\chi(C_5[K_3])$ の下界を得よ．

14.1.13　(a) $\alpha(C_5[K_3])$ を考えることで，$\chi(C_5[K_3])$ の下界を得よ．

14.1.14　(b) D の核 S を考え，S の頂点に色を塗り，そして S を除去して帰納法を使え．

14.1.15　(a) D_1 と D_2 を D の全域部分有向グラフとする．D_1 の弧は $f(u) \leq f(v)$ を満たす D の弧 (u, v) であり，D_2 の弧は $f(u) > f(v)$ を満たす D の弧 (u, v) である．$\chi(D_1) \geq m + 1$ または $\chi(D_2) \geq l + 1$ を示して，Gallai–Roy の定理 (14.5) を適用せよ．

14.1.16　G の χ-彩色を考えて，それに従って G を向き付けせよ．

14.1.22 (a)　G の奇閉路 C を考えよ．C に対して何色必要であるか，そして $G - C$ に対して何色必要であるか？

(b)　n に関する帰納法を用いよ．まず最初に，G が三角形を含むことを示せ．頂点 v を考えよ．もし $N(v)$ が独立集合ならば，$\partial(v)$ を縮約して帰納法を適用せよ．そして，三角形 T の頂点 v_1，v_2，v_3 とそれらの $G - T$ における近傍 V_1，V_2，V_3 を考えよ．$G[V_i \setminus V_j]$ と $G[V_j \setminus V_i]$ の両方に含まれる辺は存在することができるか？もし $G[V_1 \cap V_2 \cap V_3]$ に辺が存在しなければ，G の 4-彩色を見つけよ．

14.1.23　G の χ-彩色および，その色集合を等しいまたはほぼ等しい 2 つの部分集合に分割するランダム分割を考えよ．
あるいは，そのような分割をすべて考えて，平均を用いた議論を適用せよ．

14.1.26　任意の頂点の近傍は 2 色に彩色することができることを示せ．反復的に，まだ着色されていない頂点によって誘導される G の部分グラフにおいて十分に高い次数 k（未定）の頂点を選び，各段階で 2 つの新しい色を使って，その近傍にそのような色を割り当てよ．そして，再び新しい色を使い，貪欲ヒューリスティックによって（最大次数が k より小さい）残りの部分グラフに色を塗れ．

14.1.28

(a)　$\sum_i i n_i$（ただし n_i は F における深さ i の頂点の個数）を最大化する D の全域分枝林は，所望の性質を持つことを示せ．

14.1.29　可算無限グラフ G に対して，$V = \{v_0, v_1, \ldots\}$ とし，$G_i := G[\{v_0, v_1, \ldots, v_i\}]$ とおく ($i \in \mathbb{N}$)．$\mathcal{C}_i$ によって，色 $1, 2, \ldots, k$ を用いた G_i の彩色の集合を表す．頂点集合が $\cup\{\mathcal{C}_i : i \in \mathbb{N}\}$ であるグラフを定義する．ただし，$c_i \in \mathcal{C}_i$ と $c_j \in \mathcal{C}_j$ が隣接しているのは，$j = i + 1$ であり，c_i が c_j の $\{v_0, v_1, \ldots, v_i\}$ への制限となるときである．そして，König の補題（演習 4.1.21）を適用せよ．（可算でない無限グラフ G に対しては，Diestel (2005), p.201 を参照せよ．）

14.2 節

14.2.1 臨界的部分グラフを考えよ.

14.2.9 演習 14.2.9 を用いよ.

14.2.11 (a) 定理 14.10 と 14.7 を使え.

14.2.15 $\mathcal{C} := (V_1, V_2, \ldots, V_k)$ を単集合の色集合ができるだけ少ない G の k-彩色とする．$\mathcal{C}' := (V_1', V_2', \ldots, V_l')$ を各色集合が 2 つ以上の頂点を含む G の彩色とする．2 部グラフ $F := F[X, Y]$ を構成せよ．ただし $X := \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ かつ $Y := \{V_1', V_2', \ldots, V_l'\}$ とし，V_i が V_j' と隣接しているときかつそのときに限り $V_i \cap V_j' \neq \emptyset$ である．$|V_1| = 1$ と仮定する．V_1 が F において，$|V_i| \geq 3$ を満たすある V_i と結ばれていることを示し，それに応じて $\mathcal{C}$ を改良せよ.

14.2.18 定理 14.7 と 2.4 を適用せよ.

14.3 節

14.3.1 G_k が k-染色的であるという事実は定理 14.12 の証明で示されている．G_k には 3 種類の辺が存在する．G_{k-1} に属すそれらに対して，帰納法を使え.

14.3.2 $1 \leq i \leq n/2$ かつ $n/2 < j \leq n$ を満たす SG_n の頂点 $\{i, j\}$ 全体の集合に色を塗れ．そして，残りの頂点に色を塗るために帰納法を適用せよ.

14.3.3 もし H が k-彩色可能ならば，S のある n-元部分集合が存在して，それらのすべての元が同じ色で塗られている．矛盾を得るために，対応する G のコピーを考えよ.

14.4 節

14.4.2 $\overline{C_{2k+1}}$ が非理想的であることを示すために，14.1 節の不等式を使え.

14.4.3 (a) 系 9.22 を使って，n に関する帰納法を用いよ.

14.4.4 グラフの位数に関する帰納法を用いよ.

14.4.7 定理 14.14 を適用せよ.

14.4.8 もし G が非理想的であれば，そのグラフは極小非理想的誘導部分グラフを持つ．そのような部分グラフを判別するための簡明な証拠を与えよ.

14.5 節

14.5.5　(X, Y) によって，K_{n,n^n} の 2 部分割を表す．ただし $|X| = n$ かつ $|Y| = n^n$ である．このグラフが n-リスト彩色可能でないことを示すために，X の頂点に互いに素な n-集合を割り当てて，Y の頂点に適切なリストを割り当てよ．

14.5.7　$K_{n,n}$ の 2 部分割の一方におけるリストから任意に色を選ぶ．T を選ばれた色の集合とする．$|T| \geq k$ を示せ．

14.5.3　すべてのリストが全く同じではないとしてよい（なぜ？）．G が正則でなければ，G の適切な向き付けを見つけて，定理 14.20 を適用せよ．G が正則ならば，G の端ブロック B を考えよ．B が異なるリストを持った隣接する頂点を含むならば，それらの 1 つは切断点ではない（なぜ？）．その頂点にその隣接点のリストにない色を割り当てて，その近傍のリストからこの色を（もし存在すれば）削除し，G からその切断点ではない頂点を除去することで得られるグラフの適切な向き付けを見つけることで，定理 14.20 を適用せよ．B のすべての頂点が同じリストを持つならば，ブロック B と G の残りのブロックの和を別々に色を塗ることによって，G の Δ-リスト彩色を得よ．

14.5.8

(a)　k に関する帰納法を用いよ．そのリストが異なる k-道上の 2 つの連続する頂点が存在するかどうかで，2 つの場合を考えよ．

(b)　n に関する帰納法を用いよ．3 つの道のうち 2 つ以上の長さが 3 以上である（2 部的）シータグラフが 2-リスト彩色可能でないことを示すために，3 本目の道上のすべての頂点に対して同じリストを割り当て，他の 2 本の道に対して適切なリストを割り当てよ．次数が 2 より小さい頂点を持たず，次数が 3 以上の頂点を 2 つ以上を持つ 2-リスト彩色可能なグラフがシータグラフであることを示すために，次を満たす，偶閉路 C に対するリストの割り当てを見つけよ：すべてのリスト彩色において，C の与えられた頂点に同じ色が割り当てられている．2-リスト彩色可能なグラフにおいて，任意の 2 つの閉路が共通の頂点を 2 つ以上持つことを示せ．

14.5.9　$v \in V$ に対して，$c(v)$ を $L(v)$ からランダムに選ばれた色とする．$e \in E$ に対して，e の両端点に同じ色が割り当てられた‘悪い’事象 A_e を考えよ．

14.5.10　(a) 区間グラフ G が，ある道 P の n 個の部分道 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ の交差グラフとして見なせることを示せ．ただし P_n は単に P の端点である．G の所望の向き付けを得るために n に関する帰納法を適用せよ．

14.6 節

14.6.2　(b) $A(D) \setminus A(D')$ によって誘導される D の部分グラフが偶有向グラフであることを示して，演習 2.4.2 を適用せよ．

14.6.5　(a) G のオイラー向き付けの逆はオイラー有向グラフである．これら 2 つは同じ符号を持つことを示せ．

14.6.6　(a) 系 14.21 を適用して，演習 21.4.5 を利用せよ．

14.7 節

14.7.3　(a) 漸化式 $P(G,x) = P(G \setminus e, x) - P(G/e, x)$ を使って，帰納法を適用せよ．

14.7.4　(b) $P(G,x)$ における x^{n-1} の係数を計算して，演習 14.7.3a を適用せよ．

14.7.5　漸化式 $P(G,x) = P(G \setminus e, x) - P(G/e, x)$ と演習 14.7.4a を使え．

14.7.9　G が連結で，$0 < x < 1$ であるとき，$(-1)^{n-1}P(G,x) > 0$ を証明せよ．木に対してこれを示し，そして漸化式 $P(G,x) = P(G \setminus e, x) - P(G/e, x)$ を用いよ．

14.7.10　完全グラフの染色多項式に関して，$P(G,x)$ の展開を考えよ．

14.7.11　$f(G)$ によって，G の無閉路的向き付けの個数を表す．$f(G) = f(G \setminus e) + f(G/e)$ を示せ．そして m に関する帰納法によって証明せよ．

14.7.12　$V(G)$ から $\{1, 2, \ldots, k\}$ への k^n 個の写像全体の集合を考える．$e \in E$ に対して，A_e によって，e の両端点に同じ値が割り当てられたそのような写像全体の集合を表す．$S \subseteq E$ に対して，すべての $e \in S$ に対して e の両端点に同じ値が割り当てられているそのような写像がどれくらいあるか？集合 A_e に関して，G の頂点彩色全体の集合を表現して，包除公式 (2.3) を適用せよ．

15.1 節

15.1.1　すべての面が次数 5 または 6 となるメビウスの帯への埋め込みを探せ.

15.3 節

15.3.1　(a) 演習 14.1.5a を確認せよ.

15.4 節

15.4.2　(a) もし $\delta \geq 3$ ならば，演習 10.1.5 を使え．次数が 3 より小さい頂点があれば，それを除去して帰納法を用いよ.

15.4.3　演習 14.1.13 を参照せよ.

15.4.6　各段階で，現在の独立集合から距離 2 の頂点を追加するという貪欲アルゴリズムを用いて，G の極大独立集合 S を構成せよ．S を含み，$2|S|-1$ 個以下の頂点を持つ G の木 T が存在することを示せ.

15.4.7　片方の向きの証明は簡単である．もう一方の向きの証明に対しては，頂点集合を大きさが 2 の独立集合に分割することができる最大の誘導部分グラフを考えよ.

16.1 節

16.1.3　$\overline{G}$ は大きさが 3 以上の独立集合を持たないことを示せ．この事実を使って，G のマッチングと $\overline{G}$ の彩色との間の全単射を見つけよ．

16.1.7

(a)　G の 1-正則全域部分グラフ $G[M]$ に定理 2.9 を適用せよ．

(b)　S を Petersen グラフの 5-閉路の頂点集合とする．$|M \cap \partial(S)| \neq 3$ を示せ．Petersen グラフのこの性質と (a) を使え．

16.1.8

(a)　演習 16.1.7a を適用せよ．

(b)　そのグラフの 3 本の切断辺に注目せよ．

(c)　次を満たす単純 $(2k+1)$-正則グラフを構成せよ：頂点数が $2k-1$ のある（独立）集合を除去すると，$2k+1$ 個の成分を持つグラフとなり，その各成分の位数が奇数となる．（連結度が $2k-1$ であるそのようなグラフを構成することができる．）

16.1.9　部分グラフ $G[M \triangle M^*]$ を考えよ．

16.1.10　そのマッチングの辺の長さの和を考えよ．

16.1.11　G が完全マッチング M を持つならば，後手が先手の各手に対応する手があることを示せ．G が完全マッチングを持たないならば，G の最大マッチング M を考えよ．Berge の定理 (16.3) を用いて，M によって被覆されていない頂点を選ぶことから始める先手に対する必勝法を考え出せ．

16.1.12　M を G の最大マッチングとする．もし $|M| < 8$ ならば，M によって被覆されていない 2 つの任意の頂点が長さ 3 の M-増大道によって結ばれていることを示し，矛盾を導け．

16.1.13

(b)　任意の極大 M-交互道の 2 つの端点の G における次数は 1 であることを示せ．

(c)　位数 6 の例が存在する．

16.1.14

(a)　Berge の定理 (16.3) を使え．

(b)　各頂点があるリンクに接続していることを仮定から導き，そして (a) を使え．

(c)　M_A を G の最大マッチングで，(i) A の各頂点を被覆し，(ii) (i) のもとでできるだけ多くの B の頂点を被覆するものとする．M_B を同様に定義する．M_B によって被覆されていない頂点 u が A に存在すると仮定する．その頂点 u を含む $G[M_A \triangle M_B]$ の成分を考えることによって矛盾を導け．

16.1.15 (b) $G[X,Y]$ を 2 部グラフとし，xy を $x \in X$ かつ $y \in Y$ を満たす G の辺とする．x と y のどちらも本質的でないと仮定する．このとき，G のある最大マッチング M_x と M_y が存在して，M_x は x を被覆するが y を被覆せず，M_y は y を被覆するが x を被覆しない．$G[M_x \triangle M_y]$ のどの成分も x と y の両方を含まないことを示せ．P_x と P_y をそれぞれ x と y を含む $G[M_x \triangle M_y]$ の成分とする．部分グラフ $(P_x \cup P_y) + xy$ を考えることで矛盾を得よ．（よって，2 部グラフにおいて，各辺の少なくとも 1 つの端点は本質的である．）

16.1.16 G を半順序集合 $(\{1, 2, \ldots, n\}, \prec)$ に付随する比較可能グラフの補グラフとする．（よって，ij は G の辺であるときかつそのときに限り $i \prec j$ でも $j \prec i$ でもない．）n に関する帰納法によって，次を示せ：(i) $d_1 + d_2$ の最小値が $n - \alpha'$ であり，(ii) 次を満たす，G のある最大マッチング M と，すべての仕事の処理を完了するための実行可能なあるスケジュールが存在する：M によって被覆されていない頂点に対応する仕事は 1 台目の機械で処理され，M の辺に対応する仕事のペアは 2 台目の機械で処理される．

16.2 節

16.2.4 $G - v$ を考えよ．ただし v は本質的頂点である．

16.2.7 (a) 集合 $S := X \setminus K$ を考えよ．ただし K は G の極小頂点被覆である．

16.2.10 G の $k-1$ 個の頂点にどれくらい多くの辺が接続することができるか？

16.2.11 (a) $G[X]$ と $G[Y]$ のランダム k-彩色を考えよ．辺 e の 2 つの端点に同じ色が割り当てられているとき，$e \in E[X,Y]$ を**悪い**辺という．この事象の確率はいくらか？悪い辺の期待値が 1 より小さいことを示し，そして Markov の不等式 (13.4) を $t = 1$ で適用せよ．

16.2.12 M を最大マッチングとする．M によって被覆されていない各頂点 v に対して，v に接続している辺を 1 つ選び，これらの辺の集合を F とする．集合 $M \cup F$ を考えることによって，$\alpha' + \beta' \leq n$ を導け．$\alpha' + \beta' \geq n$ を示すために，G の最小辺被覆とその辺被覆によって誘導される G の部分グラフの最大マッチングを考えよ．

16.2.13 $S \subseteq X$ に対して，$G[S \cup N(S)]$ の 2 部隣接行列を考えよ．任意の行ベクトルの和と，その和における任意の 1 つの行ベクトルとの内積を考えることによって，この行列の行ベクトルが $GF(2)$ 上で 1 次独立であることを示せ．この行列の行数が列数以上であることを示し，Hall の定理 (16.4) を適用せよ．

16.2.14 命題 1.3 を使え．

16.2.15 G から得られる適切な 2 部グラフに Hall の定理を適用せよ．

16.2.17　$k < n$ に対して，任意の k 個の閉路の和が $k+1$ 個以上の頂点を持つと仮定してよい（なぜ？）．$\{V(C_i) : 1 \leq i \leq n\}$ が SDR $\{v_i : 1 \leq i \leq n\}$ を持つことを示し，適切な弧 $a_i \in A(C_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ を考えよ．

16.2.19　次を満たす 2 部グラフ $G[X, Y]$ を構成せよ：X と Y はそれぞれ，$\mathbf{Q}$ の行と列の集合であり，行 i が列 j と隣接しているときかつそのときに限り成分 q_{ij} が正である．G が完全マッチングを持つことを示せ．$\mathbf{Q}$ の 0 でない成分の個数に関する帰納法を用いよ．

16.2.24

(a)　X のタイトな真部分集合が存在すると仮定する．G が連結であるという事実を使って，完全マッチングに含まれていない辺を見つけて，G がマッチング被覆されていないと結論付けよ．逆に，G がマッチング被覆されていないと仮定する．すると，$x \in X$ かつ $y \in Y$ を満たすある辺 xy が存在して，$G - \{x, y\}$ が完全マッチングを持たない．Hall の定理 (16.4) を使って，X のタイトな真部分集合が存在することを示せ．

(b)　(a) の後半と同様である．

16.2.25　演習 16.2.24 と位数に関する帰納法を用いよ．

16.2.27　最初に (a) から (b) を導け．

そして次のように進めて，n に関する帰納法で (a) を示せ．$x \in X$ を次数 2 の頂点とし，xy_1 と xy_2 を x に接続している 2 本の辺とする．$y_1 = y_2$ であるかどうかで 2 つに場合分けせよ．

もし $y_1 = y_2$ ならば，2 本の辺 xy_1 と xy_2 は多重辺である．$H := G - \{x, y_1\}$ に帰納法の仮定を適用せよ．

もし $y_1 \neq y_2$ ならば，グラフ $H := (G - x)/\{y_1, y_2\}$ を考える．y_1 と y_2 を同一視することによって得られた H の頂点を y で表す．y_1 と y_2 の 1 つが G において次数 2 であれば，グラフ H は位数 $2n - 2$ の 3-正則 2 部グラフである．そうでなければ，頂点 y は H において次数が 4 である．e_1，e_2，e_3，e_4 を H において y に接続している 4 本の辺とする．$H \setminus e_i$ $(1 \leq i \leq 4)$ に帰納法の仮定を適用せよ．

16.3 節

16.3.5　M を G の最大マッチングとし，U を M によって被覆されない頂点の集合とする．v は本質的であるので，$\alpha'(G - v) = \alpha'(G) - 1$ である．よって，v は M によって被覆されている．uv を v に接続している M の辺とする．このとき，$M' := M \setminus \{uv\}$ は $G - v$ の最大マッチングであり，$U' := U \cup \{u\}$ は $G - v$ にお

いて M' によって被覆されていない頂点の集合である．（$G-v$ に適用した）バリアの定義と $o(G-(B\cup\{v\}))=o((G-v)-B)$ という事実を用いて，$B\cup\{v\}$ が G のバリアであることを示せ．

16.3.6 もし G が本質的頂点を持たない連結グラフであれば，補題 16.10 より，空集合が G のバリアとなる．したがって，非連結グラフを考えればよい．もし $G_1, G_2, \ldots, G_k$ が G の成分であれば，G の各最大マッチングは G_i の最大マッチングの和となることを示せ．

16.4 節

16.4.1 もしすべての $v \in V$ に対して $o(G-v)=1$ ならば，葉 x の近傍 y を考え，$G-\{x,y\}$ に帰納法を適用せよ．

16.4.4 演習 16.4.5 に対するヒントを見よ．

16.4.5 より一般的に，グラフ G が指定された集合 $X \subseteq V$ のすべての頂点を被覆するマッチングを持つための必要十分条件を求める問題を考える．次のようにして G からグラフ H を構成せよ．

- ▷ n が奇数ならば，G に孤立点を 1 つ追加せよ．
- ▷ 非隣接な頂点のペアで，どちらの頂点も X に含まれていないものに対して，それらを結ぶ辺を追加せよ．

1. G が X のすべての頂点を被覆するマッチングを持つための必要十分条件は H が完全マッチングを持つことである．これを示せ．
2. G が X のすべての頂点を被覆するマッチングを持つための必要十分条件は以下を満たすことである．

$$\text{すべての } S \subseteq V \text{ に対して } o(G[X \setminus S]) \leq |S|$$

   Tutte の定理 (16.13) を適用することでこれを示せ．
3. $G[X]$ が 2 部グラフであると仮定する．以下を示すことで (b) の命題を強くせよ：X のすべての頂点を被覆するマッチングが存在するための必要十分条件は，すべての $S \subseteq V$ に対して $G[X \setminus S]$ の孤立点の個数が $|S|$ 以下となることである．

上記の結果は，演習 16.4.4 と 16.4.5 を解くのに適用することができる．

16.4.6 マッチング数が G と同じとなる G の極大全域拡大グラフを H とする．H における次数が $n-1$ の頂点の集合を U とするとき，$H-U$ が完全グラフの非交和となることを，定理 16.13 の証明手法を使って示せ．

16.4.7

(a) 仮定より，G は完全マッチングを持つ．したがって，G の任意のバリア B に対して，$o(G-B)=|B|$ である．最初に，頂点 x と y があるバリア B に属していると仮定する．$G-\{x,y\}$ が完全マッチングを持たないことを示すために，$(G-\{x,y\})-(B\setminus\{x,y\})=G-B$ に注目せよ．次に，x と y を 2 つの頂点とし，$G-\{x,y\}$ が完全マッチングを持つと仮定する．B' を $G-\{x,y\}$ の任意のバリアとするとき，$B:=B'\cup\{x,y\}$ が G のバリアとなることを示せ．

(b) G の辺 xy が G のある完全マッチングに含まれるための必要十分条件は $G-\{x,y\}$ が完全マッチングを持つことである．

16.4.8 背理法によって示す．ある辺 xy が任意の完全マッチングに含まれていないと仮定する．演習 16.4.7b より，G のあるバリアは x と y の両方を含んでいる．B をそのようなバリアとし，$G_1,G_2,\ldots,G_{|B|}$ を $G-B$ の奇成分とする．G が 3-正則であるという仮定と，x と y が隣接しているという事実から，$|\partial(B)|\leq 3|B|-2$ であることがわかる．G が切断辺を持たないという仮定を使って矛盾を導け．

16.4.10

(a) 演習 16.4.7 を使え．

(b) Petersen の定理 (16.14) の証明と演習 16.4.8 で使った議論に似た数え上げの議論を用いよ．

16.4.11 (a) G の葉数最小の全域木 T を考える．もし $n\geq 4$ ならば，T は次数が 2 の頂点 y に隣接する葉 x を持つことを示せ．$G-\{x,y\}$ に帰納法を適用せよ．

あるいは別の方針として次のように考えよ．G を $K_{1,3}$ を誘導部分グラフとして含まない偶数位数の連結グラフとし，$S\subseteq V$ とする．単純 2 部グラフ $H:=H[S,T]$ を構成せよ．ただし T は $G-S$ の奇成分の集合であり，S の頂点と $G-S$ の奇成分を結ぶ辺が G に存在するときかつそのときに限り H においてそれらを結ぶ辺が存在する．すべての $v\in S$ に対して，$d_H(v)\leq 2$ となることを示せ．演習 16.3.2 を使うことで $|T|\leq|S|$ を示し，Tutte の定理を適用せよ．

16.4.13 G を完全マッチング M を持つ 2-連結グラフとし，$X:=\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ を G の極大バリアとする．このとき，$G-X$ は k 個の成分 $G_1,G_2,\ldots,G_k$ を持ち，各成分はハイポマッチ可能である．$1\leq i\leq k$ に対して，$V(G_i)$ を 1 つの頂点 y_i に縮小して，$Y:=\{y_1,y_2,\ldots,y_k\}$ とおく．そして，X に両端点を持つ G の辺を除去することで 2 部グラフ $H[X,Y]$ を構成する．演習 16.4.7 より，X に両端点を持つどの辺も M に属さないので，M の $E(H)$ に対する制限は H の完全マッチングである．各 G_i がハイポマッチ可能であるという事実を使って，H の任意の完全マッチングが G の完全マッチングに拡張できることを示せ．最後に，演習 16.1.13 を使え．

16.4.14

(a) 演習 16.4.13 より，問題の仮定を満たすグラフは非連結であるか，または切断

点を持つ．そのグラフのブロックを考え，帰納法を適用せよ．

(b) 一度に 2 つの頂点を追加することでそのようなグラフを再帰的に構成せよ．あるいは，$2n-1$ 個の異なる次数を持つ位数 $2n$ の（唯一の）単純連結グラフを考えよ．

16.4.16 (b) G を $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ を持つ $2k$-正則グラフとする．一般性を失うことなく G は連結としてよい．W を G のオイラー周遊とする．次のようにして 2 部グラフ $H[X, Y]$ を構成せよ（ただし $X := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ かつ $Y := \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ とする）：W 上で v_i が v_j の直前に現れるときに限り x_i を y_j と結ぶ．H が 1-因子分解可能であることを示し，そして G が 2-因子分解可能であることを示せ．

16.4.17 演習 16.4.16b を適用する．

16.4.18 G を三角形分割とする．Petersen の定理 (16.14) を G に適用せよ．

16.4.19 G を位数 4 以上の 2-連結 3-正則グラフとし，M を G の完全マッチングとする．このとき，$F := G \setminus M$ は G の 2-因子である．F の各閉路を有向閉路となるように向き付けし，この向き付けを使って M の各辺に長さが 3 の道を関連付けよ．

16.4.20 (a) もしすべての $v \in V$ に対して $d(v) \in L(v)$ ならば，すべての $v \in V$ に対して $f(v) = d(v)$ とおく．ある頂点 y に対して $d(y) \notin L(y)$ ならば，$(x, y) \in A$ とする．$G' := G \setminus xy$，$D' := D \setminus (x, y)$，$L'(x) := L(x) \setminus \{d(x)\}$，$L'(v) := L(v)$ $(v \in V \setminus \{x\})$ とおき，帰納法を適用せよ．

16.5 節

16.5.3 $G - V(T)$ から T に入る任意の M-交互道は，T の青点に接続している $E(G) \setminus M$ の辺を経由して入らなければならないことを示せ．この道に続く頂点を考えよ．

16.5.6 $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \ldots, \{x_k, y_k\}$ によって，G の k 個の部集合を表す．$v \in V$ に対して，$L(v)$ を v に割り当てられた k 色のリストとする．$k = 1$ に対して主張は明らかに成り立つ．よって，$k \geq 2$ としてよい．もし $1 \leq i \leq k$ に対して $L(x_i) \cap L(y_i) = \emptyset$ ならば，適切に定義された 2 部グラフ $H[V, C]$ に Hall の定理 (16.4) を適用せよ．ただし $C := \cup\{L(v) : v \in V\}$ である．そうでなければ，k に関する帰納法で示せ．

17.1 節

17.1.2　$K_{n,n}$ の完全マッチングへの分解を見つけよ.

17.1.3　何本の辺が同じ色を持つことができるか？

17.1.5

(a)　G_i は明らかに連結であり，3-正則である．そのグラフは切断辺を持つことができるか？

(b)　G の 3-辺彩色において，e_1 と e_2 は異なる色を受け取ることができるか？演習 16.1.7a を参照せよ.

17.1.6　G の 3-辺彩色において，3-辺切断の 2 本の辺は同じ色を受け取ることができるか？演習 16.1.7a を参照せよ.

17.1.8　ハミルトン閉路の辺に色に塗るためには何色必要か？

17.1.10

(a)　1 人の先生が 2 つのクラスを同じ時間帯に教えることは可能か？

(b)　クラス数の差が 2 以上の 2 つの時間帯を考えよ．それらの時間帯におけるクラス数を再調整することができるか？

17.1.11　各頂点の次数が正の正則 2 部グラフは，その 2 つの部集合の頂点数が同じである（演習 1.1.9 参照).

17.1.14　$\chi(K_8) = 7$ を示せ.

17.1.15　線グラフの頂点彩色は何か？線グラフのクリークは何か？これらの概念をその元のグラフの言葉で表現せよ.

17.1.16　交差する 3 つ組が異なる色を持つとき，すべての 3 つ組に必要な色数はどれくらいだろうか？

17.1.17

(a)　（演習 2.4.6a のヒントのように）1 つの頂点を除くすべての頂点を閉路上に，そして残り 1 つの頂点を中央に配置せよ.

(b)　演習 17.1.3a を参照せよ.

17.1.18　定理 17.2 の証明手法を使え.

17.1.19　位数に関する帰納法を用いよ．G を，与えられた性質を持つ 3-辺着色された完全グラフとし，v を G の頂点とする．もし $G - v$ のある色集合が連結全域部分グラフを誘導しなければ，その色によって誘導される部分グラフにおける 2 つの成分を結ぶ辺の色を観察せよ．残り 2 色の両方が現れることはあるか？

17.2 節

17.2.1　(a) 同じ色の辺はどれくらい存在するか？（演習 17.1.3 と比較せよ.）

17.2.2

(a)　H において同じ色の辺はどれくらい存在するか？

(b)　演習 17.2.1b で述べた構成方法を観察せよ.

17.2.4　(a) G の $(\Delta+1)$-辺彩色を考えよ.

17.2.5　$\{1,2,3,4,5\}$ の元の組による，$V(P \,\square\, K_3)$ の頂点の適切な表現を見つけて，それを使って，色 $1,2,3,4,5$ による $P \,\square\, K_3$ の 5-辺彩色を決定せよ.

17.2.8　(a) 補題 17.3 の証明手法を適用せよ.

17.2.9　林は次数 0 か 1 の頂点を持つ．このことを踏まえて補題 17.3 を適用せよ.

17.2.10　(a) $G[M_i \cup M_j]$ が非連結になることがあるか？

17.2.11　3-正則グラフにおいて，3-辺彩色とハミルトン閉路はどのような関係があるか？

17.2.12　背理法によって，どの正則自己補グラフもクラス 1 に属していないことを示せ．この主張の逆は未解決問題である．(A.P. Wojda. A note on the colour class of a self complementary graph. Discrete Math. 213 (2000), 333–336 を参照せよ.）

17.2.13　補題 17.3 の証明手法を使え.

17.2.14　補題 17.3 の証明手法を使え.

17.3 節

17.3.3　(a) 演習 16.1.7a における結果を使え．（そうすると次の命題が得られる：もし (M_1, M_2, M_3) が 3-正則グラフ G の 3-辺彩色ならば，V の任意の部分集合 X に対して，$|\partial(X) \cap M_i|$ $(1 \le i \le 3)$ と $|\partial(X)|$ の偶奇性が一致する.）

17.3.4　(a) Tait の定理 (11.4) の証明におけるアイディアを転用せよ.

17.3.5　(a) もし X が G_k の 5-閉路の頂点集合で M' が任意の完全マッチングならば，$|M' \cap \partial(X)| = 1$ または 5 であることを使え（演習 16.1.7b のヒントを参照せよ).

17.4 節

17.4.2　グラフ H は完全マッチング M を持つ（なぜ？）．H が三角形を持たなければ，$H \setminus M$ の辺を 2 重にすることで得られるグラフは 5-辺彩色可能であることを示せ（その線グラフを考えよ）．H が三角形を持つならば，それを 1 つの頂点に縮約して，帰納法を用いよ．

18.1 節

18.1.3 Meredith グラフにハミルトン閉路が存在したとすると，それは $K_{3,4}$ に同型な 2 つの部分グラフを結ぶ辺の両方を含むことができるか？

18.1.4 (b) 非自明な道はちょうど 2 つの端点を持つ.

18.1.5 Herschel グラフ（図 18.1 b）はハミルトニアンでないのはなぜか？このグラフを改良せよ.

18.1.7 (b) ハミルトン連結グラフはハミルトニアンである．Petersen グラフはハミルトニアンではない.

18.1.8 三角柱の 2 つの三角形を同じ方向に向き付けせよ.

18.1.10 H の道分割において，それを構成する道の端点はどこに見つかるだろうか？

18.1.11 (b) 各頂点除去部分グラフがトレース可能であるグラフは道タフであるか？

18.1.12 辺 uv と，$\alpha(u) = v$ である G の自己同形写像を考えよ.

18.1.14 演習 18.1.2 と 18.1.13 を用いよ.

18.1.15 (b) Herschel グラフが 2 部的であることを思い出せ.

18.1.16 演習 18.1.14 を用いよ.

18.1.17 Petersen グラフがハイポハミルトニアンである（演習 18.1.16a）ことを使え.

18.1.18

(a) もし G が k-閉路を持たなければ，$vx \in E$ のとき，ある $y \in V$ に対して $vy \notin E$ であることを示せ．$d(v) \leq (n-1)/2$ であることを導け.

(b) C を，指定された辿る向きを持つ G のハミルトン閉路とする．$d(x) + d(y) \geq n+1$ を満たす C の連続する頂点 x, y が存在することを示せ．ある $v \in V$ に対して $G - v$ がハミルトニアンであることを示し，2 つの場合 $d(v) \leq (n-1)/2$ と $d(v) \geq n/2$ を調べよ.

18.1.19 (b)

(i) G の閉路空間を考えよ.

(ii) ハミルトン閉路の 2 本以下の弦を含む閉路の個数を抑えよ．そして次のより良い結果を得よ：$n \leq \binom{r+2}{2} + 1$ ならば，$m \leq n + r - 1$ である.

18.1.20 もし $D' := D - \{x, y\}$ が強連結ならば，Camion の定理を適用して，演習 18.1.18a を参考にせよ．そうでなければ，y は D' の最初の強成分におけるある頂点 y' を支配していて，x は D' の最後の強成分におけるある頂点 x' によって支配されている．D' に長さ l' $(1 \leq l' \leq n-3)$ の有向 (y', x')-道が存在することを示せ.

18.2 節

18.2.2　2 連結かつ非ハミルトニアンな単純 3-正則平面的グラフから出発せよ．

18.2.3　(b) $V(G_i) \setminus V(G_{i-1})$ が G_i の独立集合であることを示せ．G_i の外周は G_{i-1} $(i \geq 1)$ の外周の 2 倍以下であることを導け．

18.3 節

18.3.2　2 つの異なる閉包が存在するならば，それらのうち一方の構成において初めて加えた，もう一方の辺でない辺を考えることで矛盾を導け．

18.3.3　(a) 演習 18.1.6a と定理 18.9 を使え．

18.3.5　(a) P を G における最長道とする．もし P の長さが $l < 2\delta$ ならば，定理 18.9 の証明手法を用いて，G が長さ $l+1$ の閉路を持つことを示せ．そして，G が連結であることを使って，矛盾を得よ．

18.3.6　G から，$\alpha(H) = \alpha(G)$ かつ $\kappa(H) = \kappa(G) + 1$ を満たすグラフ H を構成し，定理 18.10 を適用せよ．

18.3.7　そうでないとする．X の頂点をできるだけ多く通る閉路 C と $X \setminus C$ から C への道 P を考える．次数和が n より小さい 2 つの頂点（一方は P 上，一方は C 上）を見つけよ．

18.3.8

(a)　定理 18.1 を適用せよ．

(b)　定理 18.9 を適用せよ．

18.3.9　X のすべての頂点対に辺を追加することで，G から新しいグラフ H を構成せよ．H がハミルトニアンであるための必要十分条件は G がハミルトニアンとなることである．これを示せ．

18.3.10

(a)　系 18.8 を適用せよ．

(b)　もし $m = \binom{n-1}{2} + 1$ ならば，G とその閉包はいつ同一であるか？

18.3.11

(a)　最小次数 δ を抑えよ．

(b)　**梯子グラフ**は $(2 \times n)$-格子である．このグラフを改良せよ．

18.3.13　Q の長さに関する帰納法を用いよ．

18.3.15

(a)　$P := v_0 v_1 v_2 \ldots v_\ell$ とおく．ただし $v_0 := x$，$v_k := y_1$，$v_\ell := y$ である．そし

て以下を定義する：

$$X := \{v_i : xv_i \in E\} \quad \text{かつ} \quad Y := \{v_i : v_i y \in E\}$$

$X \cap Y \neq \emptyset$ と $X \cap Y = \emptyset$ の 2 つの場合を考えよ．後者の場合，C が $(X \cup Y \cup \{y\}) \setminus \{v_{k-1}\}$ の各頂点を含むことを示せ．

(b) (ii) 大きさが $k-1$ の集合 S を追加して，それらを互いに結び，そしてそれらを x と y の両方と結ぶことによって得られたグラフに，(b)(i) を適用せよ．その結果得られた閉路が S と交わるかどうかで，2 つの場合を考えよ．

18.4 節

18.4.1

(a) (i) Smith の定理 (18.13) を適用せよ．

(ii) 演習 17.2.10 と 17.2.11 を参照せよ．

(b) 演習 18.1.2 を参照せよ．

18.4.5 ロリポップ補題 18.11 を適用せよ．

18.4.6 (a) グラフ G のハミルトン閉路 C は支配的オイラー部分グラフであるので，それは $L(G)$ におけるハミルトン閉路の存在を意味する（演習 3.3.8 を参照せよ）．$L(G)$ において 2 つの辺素なハミルトン閉路を得る方法を考えよ．（C を有向閉路となるように向き付けし，G の残りの辺を任意に向き付けするとその方法を考えるのに役立つ．）逆に，$L(G)$ のハミルトン閉路分解を考える．$L(G)$ の各頂点は G の辺に対応しており，$L(G)$ の閉路が頂点を通過する方法は 2 通りある．2 つのハミルトン閉路がこの 2 通りの方法のいずれかで通過する $L(G)$ の頂点に対応する G の辺は，G のハミルトン閉路を誘導することを示せ．

18.4.7 (b) 偶平面グラフのメディアルグラフは 2-面彩色可能である．その 2-面彩色の 2 つの色集合を考えよ．

18.4.8 (a)(i) e と f の距離に関する帰納法を用いよ．

あるいは別の方法として，G から適切な 2 部グラフを構成し，演習 18.4.2 のような議論をすることで，偶数位数のグラフ G のみに対する結果を証明せよ．

18.4.9 最初に $k=4$ の場合を考えよ．そして一般の問題を 4-正則グラフの場合に帰着させよ．

18.4.10 $C-S$ の各辺をちょうど 1 回ずつ細分せよ．

18.4.11 (a) ロリポップ補題 18.11 の証明手法を用いよ．

18.4.12 (a) ロリポップ補題 18.11 の証明手法を用いよ．

18.5 節

18.5.1 G の最長道 P を考えて，Pósa の補題（定理 18.19）のように X を定義せよ．

19.3 節

19.3.1 $D := D(x,y)$ を有向グラフとする．各頂点 $v \in V \setminus \{x,y\}$ に対して y から v への k 本の新しい弧を追加することで，D から有向グラフ $D' := D'(x,y)$ を得よ．D が k 本の弧素な有向 (x,y)-道を持つための必要十分条件は D' が k 本の弧素な x-分枝を持つことである．これを示せ．

19.3.4 D に新しい頂点 x を追加し，各 $v \in V$ に対して x から v への $k - d^-(v)$ 本の弧を追加することで得られる有向グラフを D' で表す．D' が k 本の弧素な全域 x-分枝を持つことを示せ．

19.4 節

19.4.8 (b) 結論が成り立たないと仮定して，D を極大反例とする．つまり，面上の連続しない 2 つの頂点を結ぶ弧を追加すると，2 つの点素な面有向閉路を持つ有向グラフとなる．C を D の面有向閉路とする（そのような閉路は (a) より存在する）．C の任意の頂点 v に対して，C との共有点が v だけである D の面有向閉路 C_v が存在することを示せ．D は反例なので，$u, v \in V(C)$ $(u \neq v)$ に対して，閉路 C_u と C_v は共有する頂点を持たなければならない．D の平面性を考慮して，閉路 C_v $(v \in V(C))$ の中に共有する頂点の可能性を分析して，矛盾を得よ．

19.4.9 (a) 図 21.7 を参照せよ．

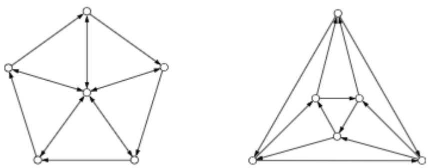

図 21.7 $\nu = 1$ かつ $\tau = 2$ である 2 つの平面的有向グラフ

19.4.11 $\mathcal{C}$ を弧素な有向閉路の最大のラミナー族とする．頂点集合が $\mathcal{C}$ のグラフ G を次のように構成する：2 つの閉路 C と C' が D において共通の頂点をもつときそれらを G において辺で結ぶ．D が 2-有向正則かつ平面的であるという事実を使って，G が平面的であることを導け．四色定理 11.2 によって，G は 4-彩色可能である．したがって，D は $\frac{1}{4}|\mathcal{C}|$ 個以上の点素な有向閉路を持つ．よって，$|\mathcal{C}| \leq 4k$ である．Lucchesi–Younger の定理 19.9 によって，D はある $|\mathcal{C}|$ 本の弧の集合を持

ち，それらを除去することで，すべての有向閉路がなくなる．これらの各弧の一方の端点を選び，それらを除去することで，すべての有向閉路がなくなる $4k$ 個以下の頂点の集合を得る．

20.4 節

20.4.1 (a) $\mathbf{Q}$ を $\mathbf{K}$ の正方小行列とする．$\mathbf{Q}$ の次数に関する帰納法を用いよ．もし $\mathbf{Q}$ が $\mathbf{0}$ の列を持つか，もしくは $\mathbf{Q}$ の各列が 2 つの非零の成分を含むならば，$\det \mathbf{Q} = 0$ である．そうでなければ，ちょうど 1 つの非零の成分を持つ列に関して $\det \mathbf{Q}$ を展開して，帰納法の仮定を適用せよ

20.4.3 ここでは，ユニモジュラ性の証明を行う．

証明． $\mathbf{Q}$ を $\mathbf{B}$ の $n-1$ 次の正方小行列とする．$\mathbf{Q} = \mathbf{B}|_{T_1}$ とする．T_1 は D の全域木としてよい．そうでなければ，定理 20.6 より，$\det \mathbf{Q} = 0$ である．$\mathbf{B}_1$ を，T_1 に対応する $\mathbf{B}$ の基底行列とする．このとき，

$$(\mathbf{B}|_{T_1})\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}$$

となる（演習 20.2.1b）．両辺を T に制限することで，

$$(\mathbf{B}|_{T_1})(\mathbf{B}_1|_T) = \mathbf{B}|_T$$

を得る．$\mathbf{B}|_T$ が単位行列であることに注意して，行列式を考えると，

$$\det(\mathbf{B}|_{T_1})\det(\mathbf{B}_1|_T) = 1$$

となる．左辺における 2 つの行列式はどちらも，整数行列の行列式であるので，整数である．したがって，$\det(\mathbf{B}|_{T_1}) = \pm 1$ となる． □

20.5 節

20.5.1 W を D における (x, y)-フローの最小電力とし，f を電力 W のフローとする．f は，フローであるので，キルヒホッフの第 1 法則を満たす．f が電流フローであることを示すためには，f がキルヒホッフの第 2 法則も満たす，つまり f が電圧であることを示す必要がある．f が電圧ではないと仮定する．このとき，f はある閉路 C の符号付き接続ベクトルと直交しない（なぜならば，電圧空間 $\mathcal{B}$ は循環空間 $\mathcal{C}$ の直交補空間であり，$\mathcal{C}$ は各閉路 C に付随する循環 $\mathbf{f}_C$ によって生成されるからである）．よって，ある閉路 C と，C を辿るある向きが存在して，$f^+(C) - f^-(C) < 0$ となる．しかしこのとき，十分に小さい ϵ に対して，フロー $f + \epsilon f_c$ は W より小さい電力を持ち，矛盾する．

一意性を示すために，f と g を流量 I の x から y への電流フローとする．このとき，$f - g$ は流量 0 の電流フローなので，$f - g$ は D における循環であり，かつ電圧である．$\mathcal{C}$ と $\mathcal{B}$ の直交性より $f - g = 0$ がわかり，つまり $f = g$ となる．

20.6 節

20.6.1　図 21.8 を参照せよ.

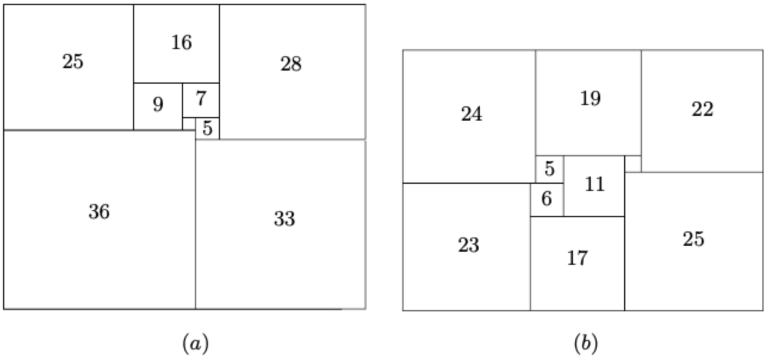

図 21.8　演習 20.6.1 の解

20.6.4　初めに，任意の完全正方形において，それを構成する最小の正方形がその完全正方形の境界上にないことを示せ．そして，完全立方体が存在すると仮定して，それを構成する立方体によって誘導される（その完全立方体の）底面上の完全正方形を考えよ．

20.6.5

(a)　フィボナッチタイリングを図 21.9 に示している.

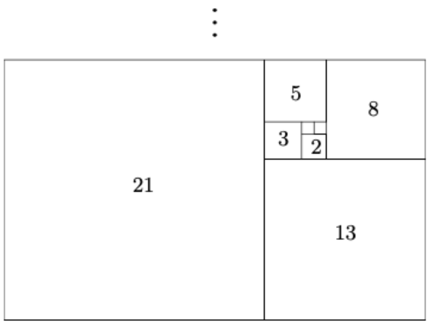

図 21.9　平面のフィボナッチタイリング

(b)　フィボナッチタイリングは完全ではない．なぜなら，サイズ 1 の正方形が 2 つ

あるからである．この状況を改善するために，最初に，フィボナッチタイリングを 112 倍に拡大し，1 つの正方形のサイズが $112F_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ となる分割を考えよ．この分割において，サイズが 112 の正方形が 2 つあるが，112 より大きい他の正方形はすべて異なる．そして，サイズが 112 の正方形の 1 つを図 20.10 に示した完全正方形に置き換えよ．

21.2 節

21.2.9　(a) 必要性は，入次数 k の頂点の集合を X とし，入次数 l の頂点の集合を Y とすることで得られる．十分性を証明するために，G に付随する有向グラフに対して，各弧に容量 1 を割り当て，X の頂点を入口と見なし，Y の頂点を出口と見なすことで，ネットワーク N を構成せよ．定理 7.7 を用いると，各入口の供給と各出口の需要が $k-l$ となる N の（どの弧も整数値を取る）フロー f が存在する．f-飽和の弧は，G の部分グラフ H 上の向き付けで，各頂点における出次数と入次数の差が $k-l$ となるものを誘導する．このとき，残りの辺にオイラー向き付けを与えることによって，G の (k,l)-向き付けを得ることができる．

21.2.13　(b)(i) S を A の部分集合とする．演習 21.2.12 により，弧集合が S の全域部分有向グラフの循環の個数は $k^{m-n+c(S)}$ である．したがって，その台が S に含まれている循環の個数は $k^{m-n+c(S)}$ である．言い換えると，$A(D)\setminus S$ のすべての弧上で零を取る循環の個数は $k^{m-n+c(S)}$ である．至るところ 0 でない循環は，どの弧も 0 でない値を取る循環であるので，包除公式 (2.3) を適用することで，所望の結果を得る．

21.3 節

21.3.2

(a)　v の次数が 2 ならば，証明は簡単である．よって，$d(v)=4$ または $d(v)\geq 6$ とする．問題の主張は以下と同値である：v に接続するある辺の組に対して，それら両方を含む G の 5-辺切断が存在しない．これを示すために，$\partial(v)$ の部分集合で，G の 5-辺切断に含まれているもの全体を $\mathcal{F}$ で表す．F を $\mathcal{F}$ の極大元とし，X を，$v\in X$ かつ $|\partial(X)|=5$ を満たす $V(G)$ の部分集合とする．$F\neq\emptyset$ としてよい（そうでなければ，v に接続している任意の 2 つの辺が目的を達成する）．最初に，F が $\partial(v)$ の真部分集合であることを示せ．そして，f を F の辺とし，e を $\partial(v)\setminus F$ の辺として，$\{e,f\}$ を含む G の任意の辺切断 $\partial(Y)$ を考える．$d(Y)\neq 5$ であることを示せ．　(L.M. de Almeida e Silva)

(b)　G を次を満たす 1-辺切断と 3-辺切断のどちらも持たないグラフとする：(i) G は 3-フローを持たない，(ii) (i) のもとで，$v(G)+e(G)$ が最小である．このとき，G が 4-辺連結 5-正則グラフであることを示せ．

21.3.5

(a)　非自明な 2-辺切断を持つ 2-辺連結グラフは 2 本以上の辺を持つ．ちょうど 2

本の辺を持つそのようなグラフは 2 本の辺に結ばれた 2 つの頂点を持つ．この場合における命題を示せ．一般の場合の命題を証明するために，$\partial(X)$ に属していない辺に対して縮約と除去をすることで帰納法を適用せよ．（縮約と除去を用いた帰納法を適用するために，ループと多重辺を許す必要があることに注意せよ．）

(b) 証明は (a) と同じようにすればよい．

21.4 節

21.4.5 (a) G の任意の向き付け D を考える．D において出次数が k より大きい頂点 x が存在すると仮定する．X を D において x から到達可能な頂点全体の集合とする．X は，出次数が k より小さい頂点 y を含むことを示せ．そして，$D[X]$ におけるある有向 (x, y)-道のすべての辺を逆向きにすると，$\sum_{v \in V} \max\{0, (d^+(v) - k)\}$ が減少することを示せ．

21.4.7 (a) 定理 21.17 より，2 つの辺素な全域木 T と T' が存在する．X を T の奇点の集合とする．演習 3.3.5b より，X の頂点の組を結ぶ $|X|/2$ 本の辺素な道が T' に存在する．T とこれらの道の和は連結偶全域部分グラフである．

21.5 節

21.5.2 最初に，演習 21.3.1 を適用することで，$v(G') + e(G') \leq v(G) + e(G)$ を満たす 2-辺連結 3-正則グラフ G' で，k-フローを持たないものが存在することを示せ．