

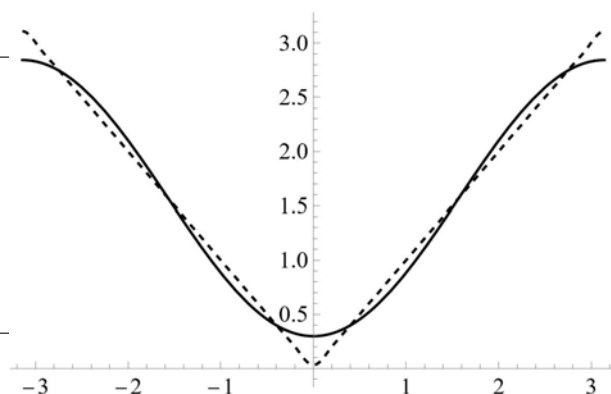
『物理数学 II – フーリエ解析とラプラス解析  
 ・ 偏微分方程式・特殊関数 –』 (丸善出版)  
 正誤表と問題の略解

西森 秀稔

略解には入力ミス等が含まれている可能性があります。誤りにお気づきの方はお知らせ下さい。

正誤表

- 2016.12.20 問題 5.4 の解答を訂正しました。
- 2023.8.25 図1.1 を右で置き換え。実線が $S_1$ , 破線が $S_{10}$  です。
- 2024.2.26 (1.101)の左辺に  $dx$  を入れる。



問題の略解

第 1 章

1.1

$$f'_R(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0+)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0+} f'(c) = f'(x_0+) \quad (x_0 < c < x) \quad (1)$$

$$f'_L(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0-)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-} f'(c) = f'(x_0-) \quad (x < c < x_0) \quad (2)$$

1.2

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (m \neq n) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(mx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{1 + \cos(2mx)\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ x + \frac{\sin(2mx)}{2m} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi \quad (m = n) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (m \neq n) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(mx) dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx \quad \text{は略。} \quad (6)$$

1.3 部分積分を繰り返し、 $p(x)$  が  $m$  次の多項式であるため  $m+1$  回微分すると 0 になることを使う。  
例えば、2 回までの微分だと

$$\begin{aligned} \int p(x)f(x)dx &= p(x)F_1(x) - \int p'(x)F_1(x)dx \\ &= p(x)F_1(x) - p'(x)F_2(x) + \int p''(x)F_2(x)dx \end{aligned} \quad (7)$$

これを繰り返せばよい。

1.4  $a_m$  のときと同様に、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx \quad (8)$$

の  $f(x)$  にフーリエ級数の式を入れ、三角関数の積分公式を使うと

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx = \pi b_m \quad (9)$$

が示せる。 $a_0$  についても同様にして、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0 \quad (10)$$

が導かれる。

1.5 (1)

$$a_0 = \frac{\pi^2}{6}, \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (n \neq 0), \quad b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \quad (11)$$

(2)

$$a_n = \frac{2(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)}, \quad b_n = 0 \quad (12)$$

(3)  $n \neq 0$  のとき、 $a$  が整数なら  $a_n = \delta_{a,n}$ 、非整数なら

$$a_n = (-1)^n \frac{2a}{\pi} \frac{\sin(a\pi)}{a^2 - n^2} \quad (13)$$

$n=0$  については、 $a=0$  なら  $a_0 = 2$ 、 $a \neq 0$  なら

$$a_0 = \frac{2 \sin(a\pi)}{a\pi} \quad (14)$$

$b_n$  は常に 0。

(4)  $a_n$  は常に 0。  $b_n = \frac{1 - (-1)^n}{n}$

1.6 (1) 正弦級数の係数は

$$b_n = \frac{-4 + (4 - 2n^2\pi^2)(-1)^n}{n^3\pi} \quad (15)$$

余弦級数の係数は

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2} \quad (n \neq 0), \quad a_0 = \frac{2\pi^2}{3} \quad (16)$$

(2) 正弦級数は  $b_n = \frac{2}{n}$ , 余弦級数は

$$a_n = \frac{2 - 2(-1)^n}{n^2\pi} \quad (n \neq 0), \quad a_0 = \pi \quad (17)$$

1.7

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot 2\pi\delta_{nm} = 2\pi c_m \quad (18)$$

1.8

$$c_n = \frac{\sinh((a - in)\pi)}{(a - in)\pi} \quad (19)$$

1.9

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{|x|} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{\pi} e^x e^{-inx} dx + \int_{-\pi}^0 e^{-x} e^{-inx} dx \right) = \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{n^2 + 1} \quad (20)$$

1.10 定義通り積分を計算すればよい。

1.11 左辺に  $S_N(x)$  の定義を入れ,  $f(x)$  と  $\cos(nx)$  の積分をフーリエ係数で書けば, 最後の式になる。まん中の式の  $S_N(x)$  に定義を入れ, 三角関数の直交関係を使えば, 最後の式になる。

1.12 本文のフーリエ余弦級数を正弦級数で置き換えればよい。

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N b_n \sin(nx) \quad (21)$$

とにおいて本文と同じ論理をたどれば,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x))^2 dx \geq \sum_{n=1}^N b_n^2 \quad (22)$$

が得られる。これより, 求める結論が導かれる。

1.13

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (23)$$

を使って上と同じことをすると

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \quad (24)$$

が得られる。

1.14 定義に出てくる和を実行すると

$$\sum_{n=1}^N \cos(nu) = \Re \left( \sum_{n=1}^N e^{inu} \right) = \Re \left( \frac{e^{iu/2} - e^{i(N+1/2)u}}{e^{-iu/2} - e^{iu/2}} \right) = \frac{\sin(Nu + u/2) - \sin(u/2)}{2 \sin(u/2)} \quad (25)$$

これより, 示すべき結果を得る。

1.15

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\sin(n+1)x + \sin(n-1)x] \, dx \quad (26)$$

を計算する。  $n$  が奇数のときには 0 になる。  $n = 2m$  (偶数) のときは

$$b_{2m} = \frac{8m}{\pi(4m^2 - 1)} \quad (27)$$

矛盾した関係  $1 = 0$  が出てくる理由は、 $\cos x$  を奇関数として全区間に拡張したとき、原点で不連続になる点にある。すなわち、(1.96) 式の左辺は  $x \rightarrow 0+$  で 1 に近づくが、 $\cos x$  を奇関数として全区間に拡張すると、 $x \rightarrow 0-$  では  $-1$  に近づく。不連続点では両側から近づくときの平均値をとらなければならないから、 $0 = 0$  となって矛盾はない。

1.16 フーリエ係数を計算すると、 $b_n = 2(1 - (-1)^n)/(n\pi)$  を得る。  $n$  が奇数の項しか残らない。

1.17 フーリエ係数を計算すると、 $c_n = (1 - (-1)^n)/(in\pi)$  を得る。  $n$  が奇数の項しか残らない。

1.18 フーリエ係数は、

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(1+n)x + \sin(1-n)x) \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^{n+1}}{1 - n^2} \quad (28)$$

得られたフーリエ級数の式の両辺で  $x = \pi$  とすると、後半の答えになる。

1.19 例えば、 $f(x) = x^2$  としてフーリエ係数を計算すると

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos(nx) \quad (29)$$

が得られる。ここで  $x = 0$  とおくと

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad (30)$$

となる。

1.20 例 1.12 より、 $|x|$  のフーリエ係数は

$$a_0 = \pi, \quad a_n = -\frac{2}{n^2\pi} (1 - (-1)^n) \quad (n \neq 0), \quad b_n = 0 \quad (31)$$

よって、パーセバルの等式より

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n-1)^2} \right)^2 \quad (32)$$

左辺の積分は  $\frac{2\pi^2}{3}$  であることから、目的の式を得る。

1.21 前半は容易。後半については、式 (1.103) より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad (33)$$

だから、前半と組み合わせて目的の式を得る。

## 第2章

2.1 奇関数だから  $a(w) = 0$ 。  $b(w)$  は,  $\sin wx$  を  $f(x)$  が 0 でない区間で積分すればよい。

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos w}{w} \sin(wx) dw \quad (34)$$

2.2

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{w \sin(w\pi)}{1 - w^2} e^{iwx} dx \quad (35)$$

2.3  $f(x)$  は区分的に連続かつ絶対積分可能だから, 2.1 の解答の式が等号として成立する。

2.4  $f(x)$  の定義を入れて積分を実行すると

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{(1-iw)x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1+iw}{1+w^2} \quad (36)$$

これより目的の式を得る。

2.5 問題 2.4 の  $f(x)$  を使うと  $e^{-|x|} = f(x) + f(-x)$  である。これより目的の式を得る。

2.6  $f(x)$  が偶関数なら,  $F(w) = F(-w) = F_c(w)$  であることから目的の式を得る。奇関数についても同様。

2.7 (1)

$$F(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a + iw} \quad (37)$$

(2)

$$F(w) = \begin{cases} i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{w \sin(w\pi)}{w^2 - 1} & w \neq \pm 1 \\ -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} & w = 1 \\ i\sqrt{\frac{\pi}{2}} & w = -1 \end{cases} \quad (38)$$

2.8 まず, 指数の肩を  $x_1$  について平方完成して積分し, 次に  $x_2$  について平方完成して積分する。結果は

$$F(w_1, w_2) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \exp\left(\frac{1}{32}(-3w_1^2 + 2w_1w_2 - 3w_2^2)\right) \quad (39)$$

反転公式による逆変換も同様。

2.9 フーリエ変換の定義に入れると, 指数の肩が  $-i(w - a)$  になることから, 性質 2 が導かれる。性質 4 は, 性質 3 の導出と同様であり, さらにもう一度部分積分をすればよい。

2.10 性質 3 から, 問題の関数のフーリエ変換は関数  $e^{-ax^2/2}$  のフーリエ変換の  $iw$  倍になるから, 例題 2.6 より

$$F(w) = \frac{iw}{\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{w^2}{2a}\right) \quad (40)$$

2.11  $\delta_n^{(3)}(x)$  は  $x \neq 0$  で極限  $n \rightarrow \infty$  において 0 に収束するから，式 (2.49) は満たされている。このことから，積分区間に原点が含まれているときには，積分区間を全実数に拡張してよいから，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{n}{n^2 x^2 + 1} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y}{n}\right) \frac{1}{y^2 + 1} dy = f(0) \quad (41)$$

2.12

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iw \cdot 0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (42)$$

反転公式については明らか。

2.13

$$\delta_n^{(1)}(ax) \begin{cases} \frac{n}{2} & |ax| < \frac{1}{n} \\ 0 & |ax| > \frac{1}{n} \end{cases} \quad (43)$$

で  $ax = y$  と置き換えればよい。積分の変数変換から  $1/|a|$  が出てくる。偶関数であることは明らか。

2.14  $\gamma = \frac{1}{n}$  と置くと (2.55) 式に帰着する。

2.15

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(w - w_0)^2}{2a^2}\right) \quad (44)$$

また， $a = \frac{1}{n}$  として (2.54) 式を使うと， $\frac{F(w)}{a}$  がデルタ関数に移行することが分かる。

2.16 (2.86) 式で  $f(x) = g(x)(= g(x)^*)$ ,  $F(w) = G(w)(= G(w)^*)$  としたものに，例 2.5 の  $f(x)$  と  $F(w)$  を適用すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 w}{w^2} dw = \pi \quad (45)$$

が得られる。

### 第 3 章

3.1  $X(x)$  が  $e^{\lambda x}$  と  $e^{-\lambda x}$  の線型結合  $c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$  となるため， $X(0) = 0$ ,  $X(a) = 0$  を満たす  $c_1, c_2$  は 0 のみになってしまう。ただし， $\lambda$  は実数と仮定している。

3.2 境界条件  $u(0, y) = \cos 2y$ ,  $u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0$  を満たす解は

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi y) \sinh(n\pi(1-x)), \quad A_n = \frac{1}{\sinh(n\pi)} \frac{2n\pi(1 - (-1)^n \cos 2)}{(n\pi)^2 - 4} \quad (46)$$

また，境界条件  $u(x, 0) = x$ ,  $u(0, y) = u(1, y) = u(x, 1) = 0$  を満たす解は

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x) \sinh(n\pi(1-y)), \quad B_n = \frac{1}{\sinh(n\pi)} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \quad (47)$$

全体の解はこれらの和である。

3.3 変数分離して  $y = 0, \pi$  で境界条件を満たす解を求めると,  $X(x) = ae^{nx} + be^{-nx}$ ,  $Y(y) = \sin(ny)$  となる。 $n$  は自然数。 $x \rightarrow \infty$  で発散する  $e^{nx}$  を除外すると答えが得られる。

3.4  $y = 0, \pi$  での境界条件を満たすように  $y$  依存性については  $\cos(ny)$  を選ぶと

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{-nx} \cos(ny) \quad (48)$$

$x = 0$  での境界条件は

$$u(0, y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(ny) = f(y) \quad (49)$$

これは  $f(y)$  のフーリエ余弦級数だから,

$$B_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(y) dy, \quad B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(y) \cos(ny) dy \quad (n \geq 1) \quad (50)$$

3.5  $y = b$  とおき,  $w$  の積分がデルタ関数  $\delta(x - u)$  の  $2\pi$  倍を与えることを使う。

3.6  $x, m, a$  に依存した部分と,  $y, n, b$  に依存した部分に分けると前者から求める式が得られる。

3.7 基本的に  $\sin$  を  $\cos$  で置き換えるだけでよい。整数についての和が,  $\sin$  のときと違って 0 から始まることに注意する。

3.8  $(u, v)$  を極座標表示  $r, \theta$  に変換すると,  $r$  が 0 に近づく極限で被積分関数が  $r^{-1}$  に比例することから, 積分は収束しない。

3.9 初期条件より  $\phi(x) + \psi(x) = 0, c\phi'(x) - c\psi'(x) = f(x)$ 。この第 1 式を微分して第 2 式と組み合わせて  $\phi'(x)$  について解き, それを第 1 式に入れると

$$\phi(x + ct) = \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} f(s) ds, \quad \psi(x - ct) = -\frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} f(s) ds \quad (51)$$

これより目標の式を得る。

3.10  $u(v, w) = \phi(u) + \psi(w)$  として初期条件を入れると

$$\phi(x) + \psi(x) = f(x), \quad c\phi'(x) - c\psi'(x) = g(x) \quad (52)$$

これを解くと, 前問と同様にして  $\phi(x + ct), \psi(x - ct)$  を得て解に至る。

3.11 フーリエ級数の係数は

$$A_n = \frac{4a(-1)^n}{n^2\pi^2} \quad (53)$$

となる。

3.12 変数分離をし, 境界条件  $u(0, t) = u(a, t) = 0$  および初期条件  $u(x, 0) = 0$  を課すと

$$X(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad T(t) = \sin\left(\frac{n\pi ct}{a}\right) \quad (54)$$

これらの積の線型結合に非同次初期条件を課すとよい。

3.13 (3.103) 式の  $\sin$  の積を

$$\frac{1}{2} \left[ \cos \left( \frac{n\pi(x-ct)}{a} \right) - \cos \left( \frac{n\pi(x+ct)}{a} \right) \right] = -\frac{n\pi}{2a} \left( \int_0^{x-ct} \sin \frac{n\pi s}{a} ds - \int_0^{x+ct} \sin \frac{n\pi s}{a} ds \right) \quad (55)$$

と書き換えればよい。

3.14 フーリエ展開の係数は

$$A_n = \frac{2a(-1 + (-1)^n)}{(n\pi)^2} \quad (n \neq 0), \quad A_0 = \frac{a}{2} \quad (56)$$

となる。

3.15

$$\kappa v(x) = -\frac{q_0}{2}x^2 + \frac{q_0}{2}\pi x \quad (57)$$

を使えばよい。

3.16 ヒントにある変数変換をして少し書き換えると

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \left( \int_{-x/(2\sqrt{\kappa t})}^0 e^{-y^2} dy + \int_0^\infty e^{-y^2} dy - \int_0^\infty e^{-y^2} dy + \int_0^{x/(2\sqrt{\kappa t})} e^{-y^2} dy \right) \\ &= u_0 \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \end{aligned} \quad (58)$$

となる。

3.17

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_{-a}^a \frac{1}{2a} \exp \left( -\frac{(x-u)^2}{4\kappa t} \right) du \quad (59)$$

であり,  $a \rightarrow 0+$  の極限ではガウス関数

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \exp \left( -\frac{x^2}{4\kappa t} \right) \quad (60)$$

になる。

3.18 図 3.4 と同じ積分経路  $C_1, C_2$  を使って

$$\begin{aligned} G(r) &= \frac{1}{4\pi^2 r} \frac{1}{2i} \left( \int_{C_1} \frac{ke^{ikr}}{k^2 - (k_0 - i\epsilon)^2} dk - \int_{C_2} \frac{ke^{-ikr}}{k^2 - (k_0 - i\epsilon)^2} dk \right) \\ &= \frac{1}{4\pi^2 r} \frac{1}{2i} (2\pi i e^{-ik_0 r}) = \frac{e^{-ik_0 r}}{4\pi r} \end{aligned} \quad (61)$$

となる。

3.19 ヘルムホルツ方程式のときと同様に, フーリエ変換により

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}}{(ik)^4 + 4} d\mathbf{k} \quad (62)$$

動径方向以外の変数を積分すると

$$G(r) = \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{k^2}{k^4 + 4} dk \int_{-1}^1 e^{ikr\mu} d\mu = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{k \sin kr}{k^4 + 4} dk = \frac{e^{-r}}{8\pi r} \sin r \quad (63)$$

ここで,  $k$  に関する積分は,  $\sin kr = (e^{ikr} - e^{-ikr})/2i$  の第 1 項については上半面の大きな閉曲線内の特異点  $\sqrt{2}e^{\pi i/4}, \sqrt{2}e^{3\pi i/4}$  での留数, 第 2 項については下半面の大きな閉曲線内の特異点  $\sqrt{2}e^{5\pi i/4}, \sqrt{2}e^{7\pi i/4}$  での留数を拾うことにより計算した。



## 第4章

4.1  $t^4 = x$  と変数変換すると

$$\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \quad (64)$$

が得られる。

4.2

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \quad (65)$$

4.3

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) \quad (66)$$

これを繰り返せばよい。

4.4  $ax^2 = t$  と変数変換すればよい。

4.5  $\beta E = t$  と変数変換したあとガンマ関数の漸化式を使えばよい。

4.6

$$\lim_{z \rightarrow 0} z\Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \Gamma(z+1) = 1 \quad (67)$$

より, 1位の極で留数は1である。

4.7

$$\lim_{z \rightarrow -1} (z+1)\Gamma(z+1) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{\Gamma(z+2)}{z} = -1 \quad (68)$$

より, 1位の極で留数は-1。

4.8

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \dots = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)} \quad (69)$$

より

$$\lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n-1)} = \frac{(-1)^n}{n!} \quad (70)$$

4.9  $y = \sqrt{x}u$  において, 指数関数の肩に乗った  $u^3$  と  $u^4$  の項を  $u^6$  までテーラー展開すると

$$\Gamma(x+1) \approx e^x x^{x+1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} \left(1 - \frac{u^4}{4x} + \frac{u^6}{18x}\right) du = e^{-x} x^x \sqrt{2\pi x} \left(1 + \frac{1}{12x}\right) \quad (71)$$

4.10 2次形式の積分表示は

$$u^2\Gamma + 2u\Gamma' + \Gamma'' = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} (u^2 + 2u \log t + (\log t)^2) dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} (u + \log t)^2 dt \quad (72)$$

これは正半定値だから, 判別式が正にならない条件から目的の不等式が得られる。

4.11 (4.40) 式と (4.41) 式を組み合わせると  $\pi z$  を  $z$  と書き直せばよい。

4.12 (4.53) 式は,

$$\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\zeta-1} dt = \int_0^1 (t+(1-t)) t^{z-1}(1-t)^{\zeta-1} dt = \int_0^1 t^z(1-t)^{\zeta-1} dt + \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\zeta} dt \quad (73)$$

から導かれる。(4.54) 式は, (4.53) 式の両辺に  $\zeta$  をかけて (4.55) 式を使えばよい。(4.55) 式は,  $B(z, \zeta + 1)$  を定義する積分表式に  $z$  をかけて部分積分すればよい。

4.13

$$\int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{1/2} dx = B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (74)$$

$$\int_0^{\pi} \sin^4 \theta d\theta = B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{8} \quad (75)$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2\Gamma(\frac{n+2}{2})} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{(n-1)!!}{n!!} & (n: \text{偶数}) \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & (n: \text{奇数}) \end{cases} \quad (76)$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1} \theta \sin^{2n+1} \theta d\theta = \frac{1}{2} B(n+1, m+1) = \frac{n!m!}{2(n+m+1)!} \quad (77)$$

4.14 定義式 (4.90) を微分し, (4.89) 式を使って 2 階微分を 1 階微分で置き換えるとよい。

4.15  $P_0(x) = 1$  および  $P_1(x) = x$  を (4.101) 式に入れて被積分関数を部分分数分解し, 各項を積分すれば (4.102) 式が得られる。さらに, 対数  $\log(1+x)$  および  $\log(1-x)$  を  $x=0$  の周りにテーラー展開すると規格化条件が確かめられる。

4.16 (4.108) 式を微分して (4.109) 式に代入すると

$$\begin{aligned} & (1-z^2)P_\nu''(z) - 2zP_\nu'(z) + \nu(\nu+1)P_\nu(z) \\ &= \frac{\nu+1}{2^\nu 2\pi i} \oint \frac{(\zeta^2-1)^\nu}{(\zeta-z)^{\nu+3}} \left( (1-z^2)(\nu+2) - 2z(\zeta+z) + \nu(\zeta-z)^2 \right) d\zeta \\ &= \frac{\nu+1}{2^\nu 2\pi i} \oint \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{(\zeta-1)^{\nu+1}}{(\zeta-z)^{\nu+2}} \right) d\zeta \end{aligned} \quad (78)$$

$\nu$  が整数の場合, 被積分関数は完全微分で 1 価関数だから閉曲線での積分は 0 になる。 $\nu$  が整数でない場合も, 図 4.5 のように積分路を取れば, 被積分関数の分子分母での分岐は同じ構造をしているから 1 価関数と同じになる。

4.17

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} &= \frac{1}{\sqrt{r_>^2 + r_<^2 - 2r_>r_<\cos\theta}} \\ &= \frac{1}{r_>} \frac{1}{\sqrt{1 + (r_</r_>)^2 - 2(r_</r_>)\cos\theta}} = \frac{1}{r_>} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n P_n(\cos\theta) \end{aligned} \quad (79)$$

4.18 (4.124) 式を微分したものから (4.125) 式を  $n$  倍したものを引けば (4.126) 式になる。同様に, (4.125) 式を  $n+1$  倍したものを引けば (4.127) 式になる。

4.19 (4.81) 式から (4.83) 式の具体的な形を使って積分を実行する。

4.20  $f(x) = x^3$  は3次だから  $P_3(x)$  以下の線形結合で書ける。よって、ルジャンドル級数の係数を与える式 (4.133) で、 $n$  が4以上については直交性より  $A_n = 0$  となる。 $n \leq 3$  については、 $f(x) = x^3$  を入れて実際に積分を計算すると

$$f(x) = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x) \quad (80)$$

となる。

4.21 (4.124) 式

$$xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x) \quad (81)$$

を左辺に入れて直交規格関係式を使うと、上式右辺第1項から  $m = n+1$  の場合、第2項から  $m = n-1$  の場合の式が得られる。

4.22 境界条件より、 $u$  には  $\phi$  依存性がないから、(4.162) 式右辺の最後の項は  $m = 0$  のみ残る。また、 $\cos \theta$  に関する正則性から  $Q_l^m$  の項は落ちる。よって

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (\alpha_l r^l + \beta_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta) \quad (82)$$

境界条件より

$$\begin{aligned} \alpha_l a^l + \beta_l a^{-l-1} &= \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx \\ \alpha_l b^l + \beta_l b^{-l-1} &= 0 \end{aligned} \quad (83)$$

これらを  $\alpha_l, \beta_l$  について解けばよい。

4.23 運動量の量子化による演算子表現と、(E.21) 式と (E.23) 式を組み合わせると

$$L_z = x \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right) - y \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \frac{\partial}{\partial \phi} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (84)$$

4.24  $L_z$  については、(4.166) 式を  $\phi$  で微分すると  $im$  倍になることから、直ちに確かめられる。 $L^2$  については、(4.166) 式に (4.172) 式の右辺第1項と第2項の微分を適用して計算する。第1項は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) P_l^m(\cos \theta) &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \sin \theta (-\sin \theta) \frac{d}{dx} P_l^m(x) \Big|_{x=\cos \theta} \right\} \\ &= -2 \cos \theta \frac{d}{dx} P_l^m(x) \Big|_{x=\cos \theta} + \sin^2 \theta \frac{d^2}{dx^2} P_l^m(x) \Big|_{x=\cos \theta} \\ &= \left( -2x \frac{d}{dx} P_l^m(x) + (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_l^m(x) \right) \Big|_{x=\cos \theta} \\ &= \left( \frac{m^2}{1-x^2} - l(l+1) \right) P_l^m(x) \Big|_{x=\cos \theta} \\ &= \left( \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - l(l+1) \right) P_l^m(\cos \theta) \end{aligned} \quad (85)$$

(4.172) 式の右辺第2項の微分演算と合わせると上式の最後の表現の第1項  $m^2/\sin^2 \theta$  が消えて、目標の式になる。

4.25 (4.166) 式と (4.167) 式の計算を丁寧に進めればよい。例えば、

$$Y_2^0 = \left( \frac{5 \cdot 2!}{4\pi \cdot 2!} \right)^{1/2} \frac{1}{2^2 \cdot 2} \frac{d^2}{dx^2} (x^2 - 1)^2 \Big|_{x=\cos \theta} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{12x^2 - 4}{8} \Big|_{x=\cos \theta} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (86)$$

4.26 (4.199) 式の導出を  $\nu$  を  $-\nu$  に変えてたどればよい。

4.27  $\cos(x \sin \theta)$  を  $x \sin \theta$  でテーラー展開し, (4.20) 式の右辺に入れて, 現れる積分

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} \theta \cos^{2\nu} \theta d\theta \quad (87)$$

を, (4.45) 式によりベータ関数で表す。さらに, ベータ関数のガンマ関数による表現式 (4.47) と, 問題 4.3 にある半整数のガンマ関数の表現を使うと, ベッセル関数の級数表示式 (4.199) になる。その際,

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!} = \frac{1}{(2n)(2n-2)\cdots 2} = \frac{1}{2^n n!} \quad (88)$$

を使うとよい。

4.28 (1) (4.215) 式の左辺の微分を実行すると

$$x(J_0(x))^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{y(x)}{J_0(x)} \right) = x(y'(x)J_0(x) - J_0'(x)y(x)) \quad (89)$$

が得られる。この式をさらに微分して  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y) = 0$  を使うと上式の微分が 0 であることが示される。これより, 上式左辺は定数だから (4.215) 式が示された。

(2) (4.216) 式を (4.215) 式の右辺に入れて積分し,  $J_0(x)$  の級数表示 (4.199) を用いるとよい。

(3) (4.218) 式をベッセルの微分方程式に代入し, (4.199) 式を使うと

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2k)^2 d_k x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k x^{2k+2} + 2x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = 0 \quad (90)$$

が得られる。 $x^2$  の係数が 0 であることから (4.220) 式の  $d_1$  の関係が導かれる。 $x^{2k+2}$  ( $k \geq 1$ ) の係数が 0 であることから, 漸化式 (4.221) が得られる。

(4) 帰納法により示される。

4.29 定義式 (4.223) の左辺の  $J_\nu(iz)$  に級数表示 (4.199) を適用すれば導かれる。

4.30  $J_\nu(x)$  の級数表示に  $x^\nu$  をかけて微分すると, 直ちに得られる。

4.31 指示通りに計算すればよい。

4.32 (4.227) 式と (4.228) 式で  $\nu$  の符号を変えると

$$\frac{d}{dx} (x^\nu J_{-\nu}(x)) = -x^\nu J_{-(\nu-1)}(x), \quad \frac{d}{dx} (x^{-\nu} J_{-\nu}(x)) = x^{-\nu} J_{-(\nu+1)}(x) \quad (91)$$

これより

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^{-\nu} Y_\nu(x)) &= x^{-\nu} \frac{1}{\sin(\nu\pi)} ((-\cos(\nu\pi))J_{\nu+1}(x) - J_{-(\nu+1)}(x)) \\ &= -x^{-\nu} \frac{1}{\sin(\nu+1)\pi} (\cos((\nu+1)\pi)J_{\nu+1}(x) - J_{-(\nu+1)}(x)) = -x^{-\nu} Y_{\nu+1}(x) \end{aligned} \quad (92)$$

と, (4.227) 式と同様の関係が示される。(4.228) 式についても同様にすればよい。ハンケル関数は  $J_\nu(x)$  と  $Y_\nu(x)$  の線形結合なので, 同じ式を満たす。

4.33 (4.235) 式で  $x \rightarrow ix, z \rightarrow -ie^{i\theta}$  とおいて,  $I_\nu(x)$  の定義と照らし合わせると導かれる。

4.34  $\phi \rightarrow \pi - \phi$  とすると，被積分関数で  $\cos(x \sin \phi)$  と  $\sin(x \sin \phi)$  はそのままである。 $n$  が偶数のときは  $\sin(n\phi)$  が符号を変え， $n$  が奇数のときは  $\cos(n\phi)$  が符号を変えるから，それぞれの場合に 0 になる。

4.35 (4.242) 式の両辺に  $e^{-ik\theta}$  をかけて  $-\pi$  と  $\pi$  の間で積分すればよい。

4.36 (4.248) 式は  $\cos(x \sin \phi)$  のフーリエ変換だから，パーセバルの等式 (1.99) を適用すると (4.250) 式になる。同様に，(4.249) 式から (4.251) 式が導かれる。これら 2 つの式の和を取ると，(4.252) 式になる。

4.37  $f(x, z) = \exp\left(\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) z^{-\nu}$  とおいて (4.256) 式の微分を実行すると，この式が次のようになる。

$$\left\{ x^2 \left( \frac{1}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right) \right)^2 + x \left( \frac{1}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right) \right) + (x^2 - \nu^2) \right\} \frac{f(x, z)}{z} = \left\{ x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + (x^2 - \nu^2) \right\} f(x, z) \quad (93)$$

これは，(4.259) 式をベッセルの微分方程式に入れたときと同じ形である。

4.38 漸化式 (4.228) および同じ漸化式で  $\nu \rightarrow \nu + 1$  と置いたものを組み合わせると

$$J_{\nu-1}(x) = \frac{1}{x^{\nu-1}} \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x) \quad (94)$$

これを繰り返すと

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{x^{-n-\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n x^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(x) \quad (95)$$

これに (4.257) 式の 2 つめの式を適用すればよい。(4.260) 式については，(4.207) 式から直ちに導かれる。

4.39 (4.268) 式で  $r$  を  $\frac{r}{k}$  とすると， $k^2 r^2$  が  $r^2$  に置き換えられて他の部分はそのままの形の式になる。その式に (4.269) 式を代入して微分を実行すると，(4.270) 式になる。

4.40  $j_0(r), y_0(r)$  は定義から直ちに得られる。その他については，定義に従って微分を行うと得られる。

4.41 (4.283) 式を極座標で表して変数分離をしたときに動径関数が満たす式は，(4.181) 式で  $V = 0$  とした式である。この式で  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  とおくと

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \right) R(r) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} R(r) \quad (96)$$

となる。これは (4.284) 式である。この方程式の解は球ベッセル関数  $j_l(kr), y_l(kr)$  だが，原点での正則性を満たす  $j_l(kr)$  のみが実際の解として許される。(4.287) 式のまん中の式は  $\phi$  依存性を持たないので，波動関数の角度部分は一般の球面調和関数で  $m = 0$  とおいたルジャンドル多項式になる。

4.42 (4.285) 式に (4.280) 式を代入して両辺に  $-\sin \theta P_j(\cos \theta)$  をかけて  $-\pi$  から 0 まで積分する。直交関係式 (4.134) を使うと

$$\int_{-1}^1 e^{ikrx} P_j(x) dx = \frac{a_j}{2i^j} \int_{-1}^1 e^{ikrx} P_j(x) \frac{2}{2j+1} dx \quad (97)$$

となるから，目的の式が得られる。

4.43 (4.288) 式により展開係数を計算する。(4.228) 式によると

$$x^2 J_1(x) = \frac{d}{dx}(x^2 J_2(x)) \quad (98)$$

であり, この式で  $x \rightarrow \alpha_j x$  としたものを使うと

$$A_j = \frac{2}{(J_{\nu+1}(\alpha_j))^2} \int_0^1 \frac{1}{\alpha_j} \frac{d}{dx}(x^2 J_\nu(\alpha_j x)) dx = \frac{2}{\alpha_j J_\nu(\alpha_j)} \quad (99)$$

4.44 (1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (100)$$

(2) 変数分離をし, 簡単のため動径部分の関数を全体の関数と同じ  $u(\rho)$ ,  $z$  方向の関数を  $v(z)$  と書けば

$$\frac{1}{u} \left( \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} \right) = -\lambda, \quad \frac{1}{v} \frac{d^2 v}{dz^2} = \lambda \quad (101)$$

$u$  はベッセル関数  $J_0(\alpha_j \rho)$  である。 $\alpha_j$  は,  $u$  が境界条件を満たすよう  $J_0(\alpha_j c) = 0$  なるベッセル関数の零点を取る。このとき  $\lambda = \alpha_j^2$  である。よって

$$u(\rho, z) = \sum_{j=1}^{\infty} A'_j J_0(\alpha_j \rho) (B_j e^{\alpha_j z} + C_j e^{-\alpha_j z}) \quad (102)$$

境界条件  $u(\rho, 0) = 0$  より  $B_j = -C_j$  だから, (4.317) 式が得られる。係数は

$$A_j = \frac{2}{b^2 (J_1(\alpha_j b))^2} \int_0^b \rho f(\rho) J_0(\alpha_j \rho) d\rho \quad (103)$$

4.45 (4.271) 式と (4.318) 式より

$$j_l(r) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos\left(r - \frac{2l+2}{4}\pi\right) = \frac{e^{ir}(-i)^{l+1} + e^{-ir}i^{l+1}}{2r} \quad (104)$$

これを (4.285) 式に入れればよい。

4.46 (4.329) 式を  $x$  で微分すると

$$2z \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x) \frac{z^n}{n!} \quad (105)$$

両辺の対応する項の係数を比較すればよい。

4.47 指示通りの計算をするとただちに得られる。

4.48  $H_n(x) = e^{x^2/2} \phi_n(x)$  を (4.348) 式に代入すればよい。

4.49 (4.351) 式で  $x \rightarrow \alpha x$  と置き換え,  $x$  での 2 階微分の項の係数が 1 になるように全体を定数倍すれば

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \left( \frac{2m\alpha^2 E}{\hbar^2} - \frac{m\alpha^4 k}{\hbar^2} x^2 \right) \right) \psi(\alpha x) = 0 \quad (106)$$

$x^2$  の項の係数が 1 になるように  $\alpha = \left( \frac{\hbar^2}{mk} \right)^{1/4}$  と取ると

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \left( 2\sqrt{\frac{m}{\hbar^2 k}} E - x^2 \right) \right) \psi(\alpha x) = 0 \quad (107)$$

これと式 (4.350) との比較より

$$E = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar^2 k}{m}} (2n+1), \quad \psi_n(\alpha x) = e^{-x^2/2} H_n(x) \quad (108)$$

4.50 (4.330) 式より

$$x^2 H_n(x) = \frac{1}{2} x H_{n+1}(x) + n x H_{n-1}(x) = \frac{1}{4} H_{n+2}(x) + \left(n + \frac{1}{2}\right) H_n(x) + n(n-1) H_{n-2}(x) \quad (109)$$

これを (4.357) 式の被積分関数の中の  $x^2 H_n(x)$  の部分に入れて、直交規格化関係 (4.352) 式を使うと、求める結果が導かれる。

4.51  $c = 1$  のときの係数の漸化式は

$$a_{j+2} = \frac{2(j+1-\nu)}{(j+2)(j+3)} a_j \quad (110)$$

$c = 0$  のときと同じようにして解くと

$$a_{2k} = \frac{2^k (1-\nu)(3-\nu)\cdots(2k-1-\nu)}{(2k+1)!} a_0 \quad (111)$$

$k$  が  $\nu$  に比べて十分大きいとき

$$a_{2k} \approx \frac{2^k (2k-1)!!}{(2k)!} \approx \frac{2^k (2k)!!}{(2k)!} \quad (112)$$

以後、 $c = 0$  のときと同様にして結論に至る。

4.52 (4.381) 式の両辺に現れる  $g$  を (4.369) 式で表すと

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( L_n(x) \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} - L_n(x) \frac{z^n}{(n-1)!} + L_n(x) \frac{z^{n+1}}{(n-1)!} \right) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{z^{n+1}}{n!} \quad (113)$$

両辺の  $z^n$  の係数を比較すると、目標の漸化式になる。

4.53 (4.380) 式の両辺を  $x$  および  $z$  で微分して得られる式を、(4.382) 式のカッコ内左辺の該当する項に代入すると右辺が得られる。さらに、母関数の表式 (4.369) を (4.382) 式に代入して  $z^n$  の項の係数を比較することにより、漸化式 (4.373) が得られる。

4.54  $n \neq m$  の場合。(4.393) 式に  $\psi_m$  をかけた式と、その式において  $n$  と  $m$  を入れ替えた式を書き、引き算をする。得られた式の両辺を 0 から  $\infty$  まで積分すると、部分積分により 0 になるので、直交性が確かめられる。 $n = m$  の場合は、母関数の式 (4.369) を 2 乗したものに  $e^{-x}$  をかけて、 $x$  について 0 から  $\infty$  まで積分する。左辺は指数関数の積分だから容易に実行できて

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} \quad (114)$$

が得られる。右辺においては、すでに示した直交性により 2 乗から出てくる 2 重和が 1 重和になり、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} (L_n, L_n) z^{2k} \quad (115)$$

となる。両辺を比較すると、求める結果が得られる。

4.55 本来のシュレディンガー方程式は

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{m} \left( -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{l(l+1)}{2r^2} \right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right\} R(r) = ER(r) \quad (116)$$

ここで,  $r \rightarrow \alpha r$ ,  $E \rightarrow \beta E$  において (4.413) 式の形になるように  $\alpha, \beta$  を選べば

$$\alpha = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m}, \quad \beta = \frac{m}{16\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \quad (117)$$

これより,  $r' = r/\alpha$  として

$$E = \frac{m}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad R(r') = \left( \frac{2r'}{n} \right)^l e^{-r'/n} L_{n-l-1}^{2l+1} \left( \frac{2r'}{n} \right) \quad (118)$$

4.56

$$x \cdot {}_2F_1(1, 1, 2; -x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n (1)_n}{(2)_n} \frac{(-x)^n}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!n!}{(n+1)!n!} (-x)^n = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n+1} = \log(1+x) \quad (119)$$

$${}_2F_1(1, b, 1; x/b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n (b)_n}{(1)_n} \frac{1}{n!} \left( \frac{x}{b} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b+n-1)!}{n!(b-1)!b^n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{k-1}{b} \right) \frac{x^n}{n!} \quad (120)$$

ここで,  $n$  についての和と  $b \rightarrow \infty$  の極限を交換してよいなら,  $k$  についての積の部分は 1 になり, 指数関数が得られる。 $n$  についての和は収束半径が無限大であり, また任意の  $x$  で一様収束するから, 和と極限は交換できる。

4.57 (4.426) 式が満たすべき微分方程式を (4.417) 式を使って書くと, ルジャンドルの微分方程式になる。

## 第5章

5.1  $y(t) := J_0(t)$  の満たすベッセルの微分方程式

$$t \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + ty = 0 \quad (121)$$

をラプラス変換すると

$$-\frac{d}{dp} \left( p^2 Y(p) - py(0+) - y'(0+) \right) + pY(p) - 1 - \frac{dY}{dp} = 0 \quad (122)$$

すなわち

$$\frac{dY}{dp} = -\frac{pY}{p^2 + 1} \quad (123)$$

これを解くと,  $c$  を定数として

$$Y(p) = \frac{c}{\sqrt{p^2 + 1}} \quad (124)$$

ところで, ラプラス変換の定義より,  $p \rightarrow \infty$  で (5.23) 式の左辺は 0 になる (被積分関数の  $e^{-pt}$  が 0 になるため)。よって

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pY(p) = J_0(0+) = 1 \quad (125)$$

これより, 上に出てきた定数  $c$  は 1 であることが分かる。



## 5.2 運動方程式

$$m \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = F_0 \delta(t - t_0) \quad (126)$$

をラプラス変換すれば

$$mp^2 F(p) = F_0 e^{-pt_0} \quad (127)$$

これより

$$f(t) = L^{-1} \left[ \frac{F_0 e^{-pt_0}}{mp^2} \right] = \frac{F_0}{m} (t - t_0) \quad (128)$$

## 5.3 ラプラス変換により

$$F(p) = \frac{A}{mp^2} + \frac{B}{mp(p^2 + \omega^2)} = \frac{A}{mp^2} + \frac{B}{m\omega^2} \left( \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \omega^2} \right) \quad (129)$$

よって

$$f(t) = \frac{A}{m} t + \frac{B}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) \quad (130)$$

## 5.4 $\tilde{\gamma} = \gamma/(2m)$ , $\frac{\tilde{\gamma}^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = \omega^2$ とおけば

$$F(p) = \frac{1}{2\omega} \left( \frac{\tilde{\gamma} + \omega}{p + \tilde{\gamma} - \omega} - \frac{\tilde{\gamma} - \omega}{p + \tilde{\gamma} + \omega} \right) x_0 \quad (131)$$

これより

$$f(t) = \frac{x_0}{2\omega} \left( (\tilde{\gamma} + \omega) e^{-(\tilde{\gamma} - \omega)t} - (\tilde{\gamma} - \omega) e^{-(\tilde{\gamma} + \omega)t} \right) \quad (132)$$

## 5.5 $\cos t$ のときの積分方程式のラプラス変換は

$$F(p) + \frac{1}{p-1} F(p) = \frac{p}{p^2 + 1} \quad (133)$$

これより  $F(p)$  を求めて逆変換すれば  $f(t) = \cos t - \sin t$  となる。

## 5.6 $f(t)$ をラプラス変換すると

$$F(p) = \int_0^\infty \frac{x^{1-a}}{x^2 + p^2} dx \quad (134)$$

ここで  $x = p^2 u$  と変数変換をすれば

$$F(p) = \frac{p^{-a}}{2} \int_0^\infty \frac{u^{-a/2}}{u+1} du \quad (135)$$

になるが, これは (4.52) 式と同じ積分だから, その結果を使って

$$F(p) = \frac{\pi}{2p^a \sin(\pi a/2)} \quad (136)$$

となる。逆変換により

$$f(t) = t^{a-1} \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right) \Gamma(1-a) \quad (137)$$

が導かれる。

5.7 例 5.14 と同様にして，ラプラス変換が

$$F(p) = \int_0^{\infty} \frac{p}{\sqrt{x}(x^2 + p^2)} dx \quad (138)$$

であることがわかる。特異点  $\pm ip$  の留数を拾って積分を実行すると

$$F(p) = \frac{\pi}{\sqrt{2p}} \quad (139)$$

となり，逆変換により例 5.14 と同じ  $f(t)$  が得られる。

## 付録

A.1 (A.10) 式を部分積分すればよい。

C.1 (C.22) 式の  $s$  に  $is$  を入れて全体を  $i^{-\nu}$  倍し， $s$  が大きな正の実数であることを使って  $e^{-s}$  の項を落とす。

D.1 (D.5) 式を  $c_n^*$  で変分すると直ちに得られる。

D.2  $n\pi/l = w$  と置き， $n$  が整数であることから  $\Delta n = 1$  を使うと  $\pi/l = \Delta w$  となる。これらの置き換えののち  $l \rightarrow \infty$  とするとデルタ関数のフーリエ積分になる。

E.1 簡単のために，原点をずらせて  $r_0 = 0$  とする。(E.12) 式から (E.15) 式までは 3 次元でも成立する。ただし，(E.14) 式の角度に関する積分が 3 次元では立体角に関する積分になる。したがって，(E.16) 式の最初の  $2\pi r$  が 3 次元では  $4\pi r^2$  になり，この式を積分して得られる (E.17) 式が通常のクーロンポテンシャルになる。

1 次元では，(E.13) 式は原点を中心として  $\pm r$  の区間での積分

$$\int_{-r}^r \frac{d^2}{dx^2} G(x) dx = -1 \quad (140)$$

になり，直ちに積分できて

$$\left. \frac{d}{dx} G(x) \right|_{x=r} - \left. \frac{d}{dr} G(r) \right|_{x=-r} = -1 \quad (141)$$

$G(r)$  は  $r$  の絶対値だけによる（すなわち偶関数）とすると， $G(r)$  の微分は奇関数だから，上式は

$$2G'(r) = -1 \quad (142)$$

これより， $G(r) = -r/2 + \text{const}$  である。

E.2

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (143)$$

を使って， $x$  微分のとおりと同様にして計算できる。