

付録 追加問題

本書では、各人の到達度に合わせてレベル別に様々な問題を用意した。それ以外にも大学で習う物理には、実用上面白い問題も多い。その一方では、現実にはあまりお目にかかれないが、各種公務員試験や編入試験で多く出題される問題もある。こうしたものにも目を向けないわけにはいけない。そこでここでは、実用価値が高い問題や物理の本質を問う問題と共に、公務員試験などにも出題されているものも含めてみた。ただし、各自のレベルに合わせた学習が一番効率がよいので、無理をしない範囲で解くようにしよう。基本がわからないまま公式の運用を覚えても社会に出て物理は役立たない。それは、より現実の高度な問題ほど、より基本がわかっていないと解けないからである。高度な問題を通して、基本を追求する姿勢を身につけよう。

1-10 直線上での等加速度運動

例題 1.9a ☆☆

速度ゼロの状態から等加速度運動をする。

- (1) 運動の時間が2倍になると平均速度は何倍になるか？
- (2) 運動の時間が2倍になると変位は何倍になるか？

解説 数式よりもまず、感覚的に理解できるようにしておこう。

- (1) 速度の増加が2倍になるので平均の速度も2倍。
- (2) 変位は平均速度×時間なのでそれぞれ2倍になり、4倍。

例題 1.10a ☆☆☆

時刻 $t = 0$ で初速度 v_0 の状態から一定の加速度 a で加速し、速度が v となった。

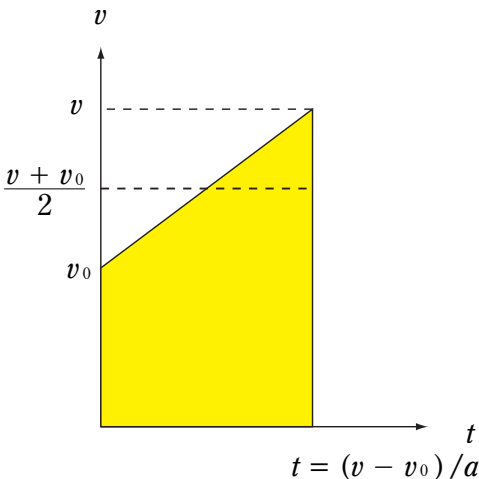
- (1) 速度が v となったときの時間を求めなさい。
- (2) 速度が v となるまでの変位を求めなさい。

解説 等加速度運動の変位は、平均速度×時間と表される。

- (1) 加速度は単位時間あたりの速度の増加を表すので

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

となる。



- (2) 変位は時間と速度についてのグラフの面積に対応する。図のように、この面積は平均速度×時間と表されるので、

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} t = \frac{v + v_0}{2} \times \frac{v - v_0}{a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

となる。

point

公式として覚えてしまっている人も多いが、自分なりの簡単な求め方も知っておこう。

3-9 空気抵抗

例題 3.39a ☆☆☆

紙を空気中で動かす。

- (1) 紙を動かす速さを2倍にすると、1秒間にあたる分子の数は何倍か？
- (2) 紙を動かす速さを2倍にすると、各分子へ与える加速度は何倍になるか？
- (3) 紙を動かす速さを2倍にすると、分子から受ける力は何倍になるか？
- (4) 紙の大きさを2倍にすると、分子から受ける力は何倍になるか？

解説 ここでは空気抵抗を感覚的に理解するようにする。作用反作用の法則により、分子に与える力が空気抵抗の大きさになる。

- (1) 2倍の体積を動かすことになるので、分子数は2倍になる。
- (2) 1秒間に分子を2倍の速度にすることになるので、加速度は2倍になる。
- (3) 力は質量×加速度であるので、 2×2 の4倍。
- (4) 同じ紙を2枚動かすのに対応するので合わせて2倍になる。

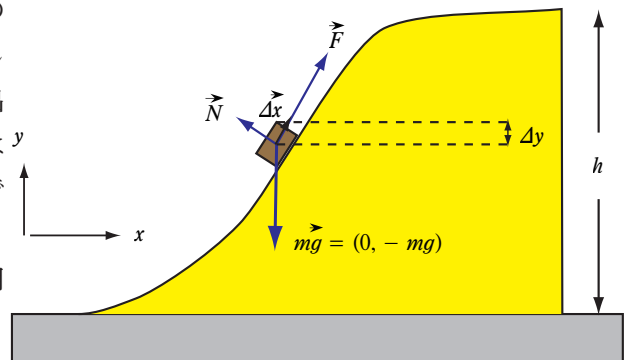
4-2 仕事と高さ

例題 4.7a ☆☆☆

図のように、曲線状のなめらかな坂にそって、ゆっくりと高さ h のところまで質量 m の物体を持ち上げる。このとき、持ち上げるのにする仕事は $W = mgh$ となることを示しなさい。

解説 曲線が出てきた場合、微小に区切るのが原則。後の問題にもあるが、時間に関しての積分で考えるのもいいが、微積分の出発点は微小区間の考え方だから本質的には同じ。微小区間では直線的と見なして後で足し合わせる。非常にゆっくりした場合、釣り合いが成り立っているというを用いる。

図のように、重力に逆らってゆっくり



Δy だけ持ち上げるのにする仕事は $\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$ である。抗力 \vec{N} と坂の方向 $\Delta \vec{x}$ とは直交している所以これは $\Delta W = (\vec{F} + \vec{N}) \cdot \Delta \vec{x}$ となる。釣り合いの式より $\vec{F} + \vec{N} = -\vec{mg} = (0, mg)$ であるので仕事は $\Delta W = mg\Delta y$ となる。これより曲面の坂に沿ってした仕事は

$$W = \sum \Delta W = mg \sum \Delta y = mgh$$

となる。

4-7 力学的エネルギーの保存

例題 4.17a



図のように、床で静止していた状態の量 m の物体を、曲線状のなめらかな坂にそって、高さ h のところまで持ち上げ静止させた。このとき、持ち上げるのにする仕事は $W = mgh$ となることを示しなさい。

解説 先の 4.7a の問題と違い、より現実的な設定。途中はどんな力でもよいので、運動方程式を用いる。

最初と最後の時間を t_i, t_f とする。運動方程式より

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{N} + m\vec{g}$$

となる。両辺に \vec{v} と内積をとってみると

$$m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{F} + \vec{N} + m\vec{g}) \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} - mg \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} - mg \frac{dy}{dt}$$

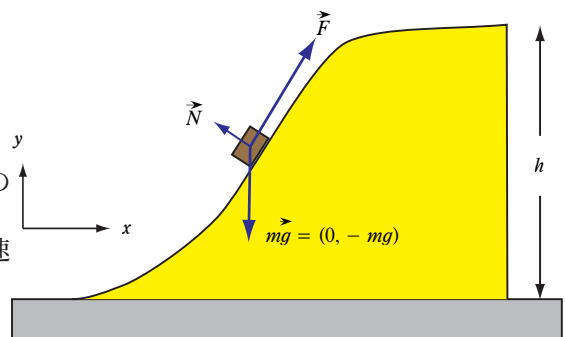
となる。 $\vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}$ は単位時間あたりの仕事を表すので、

$W = \int_{t_i}^{t_f} \left(\vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \right) dt$ であり、最初と最後の速度はゼロであることから

$$\frac{m}{2} \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} v^2 dt = \frac{m}{2} v_f^2 - \frac{m}{2} v_i^2 = W - mgh,$$

$$0 = W - mgh$$

となり仕事は途中にどのような力を与えたかによらないことがわかる。



4-9 仕事率 (パワー)

例題 4.31a



紙を空気中で動かす。2倍の速度になると、

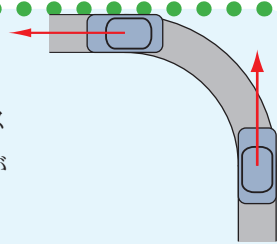
- (1) 各分子に与えるエネルギーは何倍になるか？
- (2) 1秒間あたりに衝突する分子数は何倍になるか？
- (3) 1秒間あたりに空気に与える仕事率は何倍になるか？
- (4) 空気は次々に衝突してくるので、空気が加速されるのに必要な時間は、速度によらないと考えられる。このことから、速度が2倍で空気に働く力は何倍になるか？

解説 3.39a の例題と同様の設定だ。ここでは仕事率より力の大きさを求める基本的な問題。

- (1) 各分子の速度を2倍にするので、運動エネルギーは4倍。
- (2) 1秒間に2倍の体積を動くので、2倍。
- (3) 1秒間に与える総エネルギーは分子数×それぞれの分子の運動エネルギーなので、仕事率は8倍。
- (4) 仕事率は速度×力であるので、2倍×力=8倍により力は4倍。

6-5 加速度を生じさせる力

例題 6.7a



解説 力が速度の二乗に比例すること
をできるだけ簡単に理解しておこう。
物理では、速度とスピードは別の概
念。速度は方向を持つことを認識し
ておこう。

1. あるカーブを車が一定のスピードで曲がる。カーブを曲がるスピードが2倍になると、
 - (1) カーブを抜けるまでの速度の変化は何倍になるか？
 - (2) カーブを抜けるまでにかかる時間は何倍になるか？
 - (3) カーブを抜けるまでの加速度は何倍になるか？
 - (4) 車の中の人に対する遠心力は何倍になるか？
2. 同じスピードで半径が半分のカーブを曲がる時、遠心力は何倍になるか？
- (4) 加速度と力は比例するので、遠心力は4倍。

1.
 - (1) 速度そのものが2倍なので、その変化も2倍。
 - (2) スピードが2倍なのでかかる時間は $1/2$ になる。
 - (3) 加速度は単位時間あたりの速度の変化なので、加速度は4倍。

2. 速度の変化は同じだが、距離が半分になるのでかかる時間が半分になる。よって、加速度は2倍となり、遠心力は2倍。

例題 6.19a



解説 一番上の分子は、摩擦のない水の上をぐるぐるまわっていると考えると良い。つまり、水からは抗力のみが働く。表面の角度を ϑ とすると水分子に対して力の釣り合いより

水の入ったバケツを図のように回転させると水の面は中央がくぼんだ状態になる。この表面の水分子には、その分子に働く重力と、周りの水分子から押されることによる、面に垂直な力が働く。この面の方程式を求めなさい。

$$F \cos \vartheta = mg$$

$$F \sin \vartheta = m r \omega^2$$

となる。これより F を消去すると

$$\tan \vartheta = \frac{r \omega^2}{g}$$

である。一方傾きは微分で表されるので

$$\tan \vartheta = \frac{dh}{dr}$$

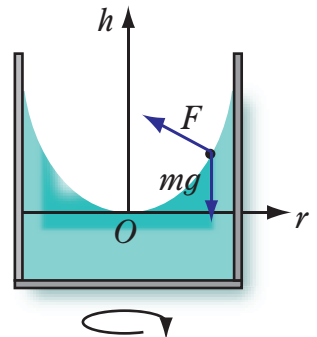
となる。これより

$$\frac{dh}{dr} = \frac{\omega^2}{g} r$$

となる。図のように原点を $h = 0$ と取っているので

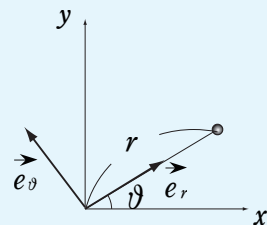
$$\int_0^h \frac{dh}{dr} dr' = h(r) = \frac{\omega^2}{g} \int_0^r r' dr' = \frac{\omega^2}{g} r^2$$

となる。このように、水面は放物面となる。



6-8 ケプラーの法則

例題 6.38a ★★★★★



図のように、質点の位置を、原点からの距離 r と x 軸からの角度 ϑ により表すと、

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= (x(t), y(t)) \\ &= (r(t) \cos \vartheta(t), r(t) \sin \vartheta(t)) \\ &= r(t) (\cos \vartheta(t), \sin \vartheta(t))\end{aligned}$$

と表される。式を見やすくするために、 $\vec{e}_r = (\cos \vartheta(t), \sin \vartheta(t))$ とし、これに垂直なベクトル \vec{e}_ϑ を

$$\vec{e}_\vartheta = (-\sin \vartheta(t), \cos \vartheta(t))$$

とする。

(1) $\frac{d}{dt} \vec{e}_r = \frac{d\vartheta}{dt} \vec{e}_\vartheta$, $\frac{d}{dt} \vec{e}_\vartheta = -\frac{d\vartheta}{dt} \vec{e}_r$ となることを示しなさい。

(2) $\frac{d}{dt} \vec{x}(t)$, $\frac{d^2}{dt^2} \vec{x}(t)$ を距離と角度により表しなさい。

(3) 質量 m の質点が、中心からの距離にしかよらないポテンシャル $V(r)$ の中で運動するとき、その力は

$$\vec{F} = -\frac{dV(r)}{dr} \vec{e}_r$$

と中心方向の力で表される。このとき、 $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta$ の方向の運動方程式を書きなさい。

(4) このような中心からの力による運動では、角運動量

$$L = mr^2 \frac{d\vartheta}{dt}$$

とエネルギー

$$E = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \right] + V(r)$$

が保存することを示しなさい。

解説 ややこしく感じるが慣れてしまえばどうということもない。

- (1) 合成関数の微分を用いてすぐに示される。
- (2) (1) の性質を利用して地道に計算すると、

付録 追加問題

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \vec{x} &= \frac{d}{dt} (r \vec{e}_r) = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d}{dt} \vec{e}_r = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vartheta}{dt} \vec{e}_\vartheta \\ \frac{d^2}{dt^2} \vec{x} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \vec{x} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vartheta}{dt} \vec{e}_\vartheta \right) \\ &= \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{e}_r + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} \vec{e}_\vartheta + r \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} \vec{e}_\vartheta - r \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \vec{e}_r \\ &= \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \right) \vec{e}_r + \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} + r \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} \right) \vec{e}_\vartheta\end{aligned}$$

となる。

$$(3) \quad \vec{F} = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r = m \frac{d^2}{dt^2} \vec{x} \text{ より}$$

$$\begin{aligned}m \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \right) &= -\frac{dV}{dr}, \\ m \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} + r \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} \right) &= 0\end{aligned}$$

となる。

(4) まず、問題中で定義された角運動量を時間で微分すると、

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(m r^2 \frac{d\vartheta}{dt} \right) = m \left(2r \frac{dr}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} + r^2 \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} \right)$$

となり、先の運動方程式より $\frac{dL}{dt} = 0$ となることがわかる。

エネルギー

$$E = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \right] + V(r)$$

を角運動量を用いて $\frac{d\vartheta}{dt}$ を消去すると

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

となる。これを時間で微分してみると

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= m \left[\frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{dr}{dt} \frac{L^2}{mr^3} \right] + \frac{dr}{dt} \frac{dV}{dr} \\ &= \frac{dr}{dt} \left[m \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \right) + \frac{dV}{dr} \right]\end{aligned}$$

となる。これは (3) の運動方程式よりゼロとなり、エネルギーが保存することも示された。

point

数学の使用による証明では、式変形にだまされたという感覚を持つ人も多い。これは、程度の差こそあれ誰にでもあることだ。たとえば筆者でも、完全系列や固定点定理などを用いた幾何の証明では何となく解った気にならないことがある。数学がかならず信じられる段階にならないとその数学を使っても身につかない。抽象的な物理を本当に知りたいと思ったら、まず微分積分くらいは確かなものにしておこう。それ以外の人は、それほど解く必要はない。

7-8 トルクと角運動量の例

例題 7.18a



図のように、質量 m の円筒の周りに糸が巻き付けられており、一端を天井に結びつけた状態で円筒を落下させた。この円筒の慣性モーメントは $I = mR^2/2$ である。落下の加速度と糸の張力を求めなさい。

解説 あまり実用的な問題ではないが、編入試験や公務員試験などに登場することが多い問題だ。基本は釣り合いとトルクの式を活用する。糸の張力を T とすると、落下の加速度を a として、

$$mg - T = ma$$

となる。一方、回転角加速度と加速度は $a = R\alpha$ の関係があり、トルクと角加速度の関係は

$$\tau = TR = I\alpha = \frac{1}{2}mR^2 \frac{a}{R} = \frac{1}{2}mRa$$

これより

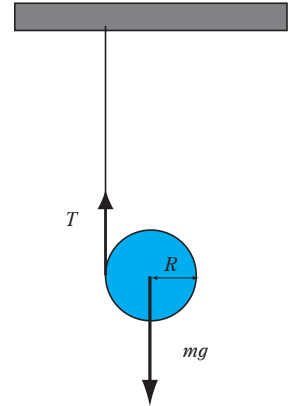
$$T = \frac{1}{2}ma$$

となり、先の式より

$$a = \frac{2}{3}g,$$

$$T = \frac{1}{3}mg$$

となる。



point

編入試験や公務員試験では、高校の範囲に含まれない問題が多く出題される。その中でも解きやすい問題は限られるので、大学入試以上に、頻出問題となりやすい。たとえば、剛体の範囲では、慣性モーメントを求めたりする問題を含める形で、坂を転がるか、このヨーヨー問題か、それとも他の例題にもあるように、棒に球が衝突するといったパターンがある。編入試験などを受ける人は注意しておこう。これらのパターン以外の出題では、受験生の正答率が悪く差が出ないので、出題しにくいといった事情は、大学入試同様である。

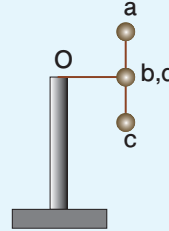
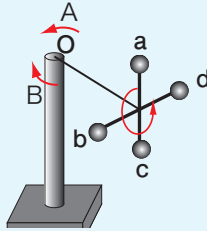
付録 追加問題

例題 7.20a

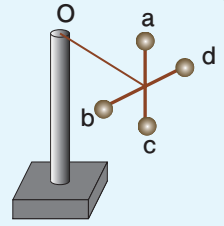


図のように O 点を支点として 4 つの質点を棒で結びつけたコマがある。コマを回した状態では、コマは落下せず、コマは O 点を中心に水平にまわっていく。これを歳差運動という。

- (1) 右の図で、コマが回っていない状態では a 点に加わる力の方向はどちらか？
- (2) 下の図で歳差運動の方向はどちらか？

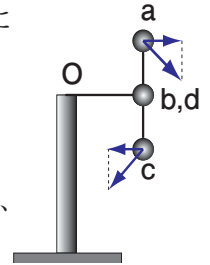


A ↓ B ↙
C ↘ D ゼロベクトル



解説 コマの歳差運動をニュートンの第二法則から感覚的に理解できるようにしておこう。

- (1) 支点を中心にまわるので、C の方向。
- (2) a 点の球は回転しながら、(1) の外向きにも移動しようとする。このため、支点を中心に A の方向に回る。

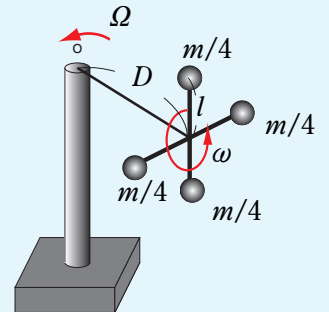


例題 7.20b



図のようなコマがある。水平な状態のコマを角速度 ω で回転させる。軸の棒の質量は無視できるほど軽いとする。

- (1) 歳差運動によって回転の方向が変わり、角運動量の方向が変化する。角速度 Ω で歳差運動するとき、微小時間 Δt の間の角運動量の変化を求めなさい。
- (2) トルクと角運動量の関係により、歳差運動の角速度を求めなさい。



解説 コマについての定量的な問題。正確に扱うには、本来はベクトル的な角運動量の理解が必要となるが、ここではトルクと角運動量の間係をそのまま用いる。

- (1) 角運動量の大きさは変わらないが、方向が変わるので角運動量は変化する。そのため、 $\Delta L = \Omega L \Delta t$ である。また、角運動量 $L = ml^2 \omega$ である。
- (2) O 点を中心として、トルクと角運動量の変化の関係と (1) の結果を用いて、

$$\frac{dL}{dt} = mgD = L\Omega$$

$$\Omega = \frac{gD}{l^2 \omega}$$

と求められる。

例題 7.28a



- スーパーボールが地面に衝突する直前に、速度 V_i で角速度 ω_i であった。地面との衝突で速度の鉛直方向の成分は反転し、同じ大きさであるとする。衝突直前と直後の x 方向の速度をそれぞれ v_{xi}, v_{xf} とし、直前直後の角速度を ω_i, ω_f とする。ただし、跳ね返りの力は強く、直前から直後にかけて重力は無視できるとする。また、この球の慣性モーメントは $I = (2/5)mR^2$ である。
- (1) 衝突直前と直後の運動エネルギーと角運動量が保存されるとして、衝突後の速度と角速度を衝突前の速度と角速度で表しなさい。
 - (2) 衝突後の角度を衝突前角度と衝突前の速度と回転角で表しなさい。

解説 スーパーボール問題は比較的新しいタイプの問題。球技などでのボールがはねる場合の基礎となる。因数分解を利用すると易しい。

(1) エネルギーが等しいことから

$$\frac{1}{2}mv_{xi}^2 + \frac{1}{5}mR^2\omega_i^2 = \frac{1}{2}mv_{xf}^2 + \frac{1}{5}mR^2\omega_f^2$$

となる。衝突の角運動量の保存より

$$I\omega_i + mRv_{xi} = I\omega_f + mRv_{xf}$$

$$v_{xf} - v_{xi} = -\frac{2}{5}(R\omega_f - R\omega_i)$$

となる。エネルギーの関係は

$$v_{xf}^2 - v_{xi}^2 = -\frac{2}{5}[(R\omega_f)^2 - (R\omega_i)^2]$$

$$(v_{xf} - v_{xi})(v_{xf} + v_{xi}) = -\frac{2}{5}(R\omega_f - R\omega_i)(R\omega_f + R\omega_i)$$

と書ける。これと角運動量の式より

$$v_{xf} + v_{xi} = R\omega_f + R\omega_i$$

となることがわかる。

上の関係と、角運動量の保存の式より

$$v_{xf} = \frac{3}{7}v_{xi} + \frac{4}{7}R\omega_i$$

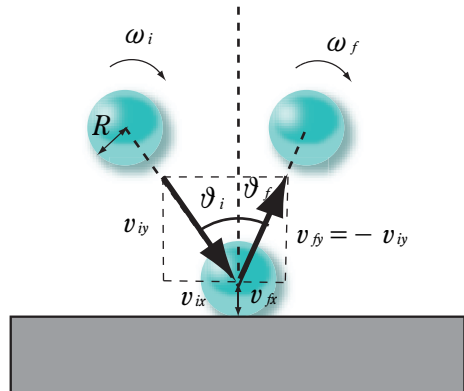
$$\omega_f = \frac{10}{7}\frac{v_{xi}}{R} - \frac{3}{7}\omega_i$$

となる。

(2) $v_{yf} = -v_{yi}$ であり、

$$\tan \vartheta_f = -\frac{v_{yf}}{v_{xf}} = \frac{4}{7}\tan \vartheta_i + \frac{5}{7}\frac{R\omega_i}{v_{xi}}$$

となる。



例題 7.28b



図のように、テニスボールが角速度 ω_i 、地面に衝突する直前の速度 $\vec{v}_i = (v_{ix}, v_{iy})$ で衝突する。テニスボールの半径を R とし、慣性モーメントは $I = (2/3)mR^2$ である。直前から直後にかけて重力は無視できるものとする。また、コート面との跳ね返り係数はおよそ $e = 3/4$ であり、動摩擦係数を μ とする。

- (1) 地面ではボールはすべりながら跳ね返るものとし、衝突後の速度と角速度を求めなさい。
- (2) ボールに回転を与えないで打った場合、接触面ですべらないで跳ね返るためには、衝突直前の角度にどのような条件が必要か？

解説 現実的な設定の跳ね返り問題。このような問題は、高度な問題というよりもより基本を理解していないとわかりにくい問題だ。符号を間違いやすいので、問題としては自分で解けるようになる必要は必ずしもないが、読んで理解できるくらいにはしておこう。

(1) 衝突中の運動方程式

$$F = \frac{d}{dt}(mv_y), \quad N = \frac{d}{dt}(mv_x)$$

の両辺を積分すると

$$\int F dt = m(v_{fx} - v_{ix}),$$

$$\int N dt = m(v_{fy} - v_{iy}) = -m(1+e)v_{iy} = -\frac{7}{4}mv_{iy}$$

となる。また、トルクと角運動量の関係

$$\tau = \frac{d}{dt}(I\omega)$$

の両辺を積分すると、($F < 0$ に注意して)

$$\int RF dt = -\frac{2}{3}mR^2(\omega_f - \omega_i)$$

となる。摩擦力と抗力の関係 $F = -\mu N$ (後方向きに注意) より

$$v_{fx} = v_{ix} + \frac{7}{4}\mu v_{iy},$$

$$\omega_f = \omega_i - \frac{21}{8}\mu \frac{v_{iy}}{R}$$

となる。

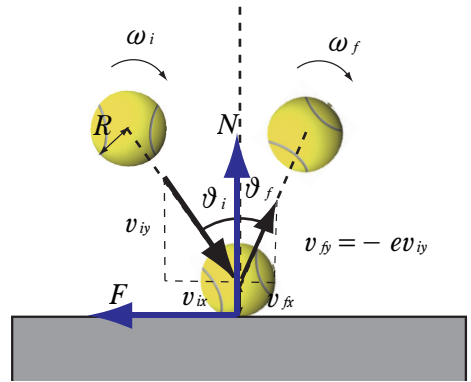
(2) 最初に $\omega_i = 0$ であることから、

$$v_{fx} = v_{ix} + \frac{7}{4}\mu v_{iy}, \quad \omega_f = -\frac{21}{8}\mu \frac{v_{iy}}{R}$$

である。 $v_{fx} - R\omega_f = 0$ のとき、接地面では、ボールは地面と静止した状態になる。このときは、すべらずに跳ね返る。そこで、

$$v_{ix} + \frac{7}{4}\mu v_{iy} = -\frac{21}{8}\mu v_{iy}, \quad v_{ix} = -\frac{35}{8}\mu v_{iy}$$

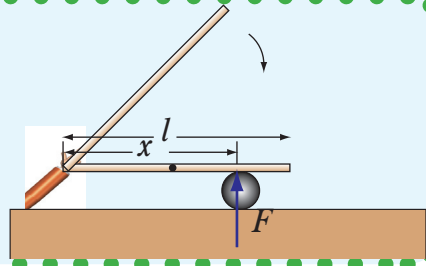
となり、これより角度は $\tan \vartheta_i = \frac{v_{ix}}{v_{iy}} = \frac{35}{8}\mu$ となる。角度がこれより小さいとすべらず、大きいとすべることになる。



例題 7.28c



図のように、長さ l の棒の端を持ってスイカ割りをする。スイカにあたったとき、手に力を入れなくて割るためには、どの位置で割ったらよいか？ただし、重力の影響は無視できるものとする。



解説 実用的な問題だ。野球のバットで打つ場合もほぼ同じ。手に力を入れなくても打てる位置を**スイートスポット**と言う。結果だけは覚えておいた方がよいだろう。

スイカを割る直前の棒の中心の速度を v とし、その角速度を ω とする。割った最後は棒の回転はゼロになるので運動方程式より

$$\int Fdt = mv$$

である。また、トルクと角運動量の関係により

$$\int Fxdt = I\omega$$

となる。これら2つより

$$x \int Fdt = xmv = I\omega$$

となる。

また端を中心とした棒の慣性モーメントは

$$I = \frac{m}{3}l^2$$

であり、手の位置を中心に回転しているので $v = \frac{l}{2}\omega$ の関係がある。このことより

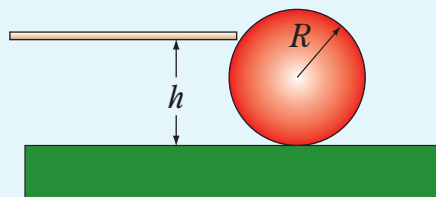
$$x = \frac{2}{3}l$$

となる。つまり、棒の先から3分の1のところ当てると力を加えなくてもよい。

例題 7.28d



ビリヤードをスティックでつく。ボールの半径を R とし、慣性モーメントは $\frac{2}{5}mR^2$ とする。ボールを台の上をすべらずに転がらせるためには、ビリヤードのボールの台からどのくらい離れたところを打てばよいか？



解説 これもビリヤードを遊ぶ人には経験的にわかっていることだろう。スティックがボールと接している時間が非常に短いことを利用する。

時間間隔 Δt の間にスティックで力 F を加える。このとき速度の増加を Δv とし、角速度の増加を $\Delta\omega$ とする。トルクは $f(h - R)$ である。運動方程式と角運動量とトルクの関係より

$$m\Delta v = f\Delta t$$

$$I\Delta\omega = f(h - R)\Delta t$$

である。 $I = \frac{2}{5}mR^2$ であり、 Δt を消去すると

$$\Delta v = \frac{2R^2 \Delta\omega}{5(h - R)}$$

となる。この間にすべらずに転がることから $\Delta v = R\Delta\omega$ の関係がなければならない。よって

$$5(h - R) = 2R$$

$$h = \frac{7}{5}R$$

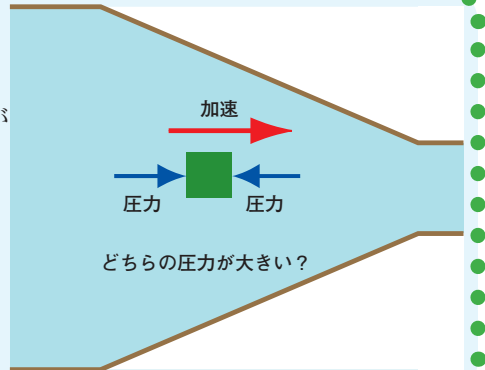
となることがわかる。

8-10 ベルヌーイの法則の応用

例題 8.26a ☆☆☆

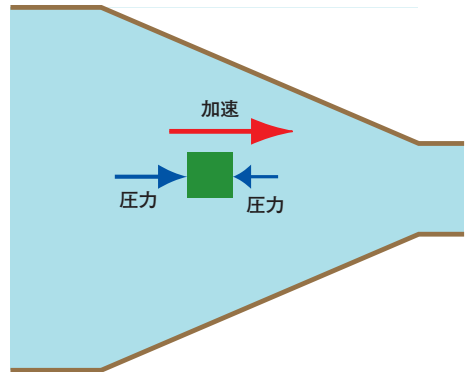
水の中を物体が移動し、右に行くと物体の速度が速くなった。このとき、右側の圧力は左側に比べて

- (A) 大きい。
- (B) 小さい。
- (C) 変わらない。



解説 流速と圧力の理解の問題。流速が速くなっていくということは、圧力の差で加速されることを意味する。ベルヌーイの法則以前に力によって速度が変わることを認識しよう。

ニュートンの第2法則より、加速度と合力は比例するので、左から押す力の方が強い。よって答えは (B)。



point

流体などでもすべての基本は、ニュートンの法則からであるという理解がないとイメージがわきにくい。イメージがわくことは、そのほかの結果も予想しやすくなるので重要である。決してベルヌーイの法則がニュートンの法則から独立にあるわけでない。