ホイットニー・カスプの判定法の証明

[USY] の第 4 章でホイットニー・カスプの判定法（定理 4.4.1）を与えた．本稿では，本文で省略した証明を与える．

ホイットニー・カスプの判定法（本文の定理 4.2.1）は，定理 4.2.3 で与えた「ツバメの尾の判定条件」と，形の上では非常に似ている．実際，命題 4.2.4 と同様の方法で，定理 4.4.1 の (2) の条件が定義域と値域の座標のとり方と特異点識別子および拡張された退化ベクトル場のとり方に依存しないことが確かめられる．

標準的ホイットニー・カスプが定理 4.4.1 (2) の条件を満たすことはすでに例 4.4.3 で示しているので，定理の条件を満たす特異点が標準的ホイットニー・カスプに右左同値であることを示せばよい．

まず，$\boldsymbol{R}^2$ の原点 $\mathbf{0} := (0,0)$ を含むある領域で定義された $\boldsymbol{R}^2$ への写像芽

$$f\colon (\boldsymbol{R}^2, \mathbf{0}) \to (\boldsymbol{R}^2, \mathbf{0})$$

を考える．以下，特に断らない限り，(u,v) を定義域の原点付近の局所座標とし，(x,y) を値域 $\boldsymbol{R}^2$ の標準的な座標とする．本稿の目標は，以下の主張を示すことである：

定理 A　C^∞ 写像芽 $f\colon (\boldsymbol{R}^2, \mathbf{0}) \to (\boldsymbol{R}^2, \mathbf{0})$ が，以下の 2 条件を満たすとする：

(i) 原点は非退化な特異点（本文第 4.4 節参照）である，
(ii) 特異点識別子（本文第 4.4 節）Λ は $\Lambda_\eta(\mathbf{0}) = 0$, $\Lambda_{\eta\eta}(\mathbf{0}) \neq 0$ を満たす，ただし, $\tilde{\eta}$ を拡張された退化ベクトル場で，下付きの η で $\tilde{\eta}$ による微分を表す.

このとき，原点の近傍の局所座標 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ と値域の原点の近傍上の微分同相

2022 年 5 月 11 日；梅原雅顕・佐治健太郎・山田光太郎

本稿は,「特異点を持つ曲線と曲面の微分幾何学（梅原雅顕・佐治健太郎，山田光太郎著，丸善出版 [USY]）の補遺である．この内容は同書の英訳版 [USY-E] の Appendix D にある．文中の「本文」は [USY] の本文を指す.

写像 Φ が存在して

$$\Phi \circ f(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{u}\tilde{v} - \tilde{u}^3, \tilde{v}) \tag{$*$}$$

が成り立つ.

本文の式 (4.12) では標準的ホイットニー・カスプを $f(u,v) = (u^3 - 3uv, v)$ で定義したが，座標変換 $(u,v) \mapsto (-u, v/3)$ と値域の微分同相写像 $\Phi : (x,y) \mapsto (x, 3y)$ によって f は $(*)$ の形になるため，定理 A を示せばホイットニー・カスプの判定法（本文の定理 4.4.1 (2)）を示したことになる.

以下の証明はホイットニー ([W]) によるものである．代数型のマルグランジュの予備定理を用いた現代的な別証明は [GG] の 7 章にある.

証明は少々複雑であるが，方針は本文第 3 章で与えたカスプ・交叉帽子・カスプ辺の判定法の証明と同じで，定理の条件を満たす写像芽 f に対して，定義域の座標変換と値域の微分同相写像を適切に施して，f が $(*)$ の右辺の形で表されることを示す.

1　記号の導入

定理 A の証明において，以下のように高次の項を表すための記号を導入する．非負の整数 d を 1 つ固定し，$\boldsymbol{R}^2$ の原点 $\mathbf{0}(= (0,0))$ の近傍で定義された C^∞ 関数 $h(u,v)$ に対して h が集合 $\mathcal{O}(d)$ に属することを

$$\frac{|h(u,v)|}{(u^2+v^2)^{d/2}}$$

が原点付近で有界であることと定義する．定義から，$\mathcal{O}(d)$ は関数の和とスカラー倍に関して閉じていることがわかる．さらに $h_1 \in \mathcal{O}(d_1), h_2 \in \mathcal{O}(d_2)$ のとき，積 $h_1 h_2$ は $\mathcal{O}(d_1 + d_2)$ に属する．また，$h \in \mathcal{O}(d)$ ならば，h の $(d-1)$ 階までのすべての偏導関数は,（定義域上の）原点で零になる．例えば $h \in \mathcal{O}(3)$ は

$$h(0,0) = h_u(0,0) = h_v(0,0) = h_{uu}(0,0) = h_{uv}(0,0) = h_{vv}(0,0) = 0$$

と同値である．さらに，原点 $(0,0)$ の近傍で定義された 2 つの C^∞ 関数 $g(u,v), h(u,v)$ が，$d \geq 0$ に対して $h - g \in \mathcal{O}(d+1)$ を満たすとき，

$$g(u,v) \equiv_d h(u,v) \tag{1.1}$$

と記す．各非負整数 d に対して (1.1) は 原点 $(0,0)$ において g と h の d 階以下全ての偏導関数が一致することと同値である．例えば

$$u^2 + uv + v^3 \equiv_2 u^2 + uv$$

である．関係 $\equiv_d$ は原点を原点に写す座標変換によらない．誤解の心配のないときは 1 変数の C^∞ 関数 $\varphi(t)$ に対しても同じ記号を使う．つまり，$\varphi \in \mathcal{O}(d)$ は $|\varphi(t)|/|t|^d$ が $t = 0$ の近傍で有界であることを意味する．

2　第 1 段階の座標変換

まず次の命題を示す.

命題 2.1　$f : (\boldsymbol{R}^2, \mathbf{0}) \to (\boldsymbol{R}^2, \mathbf{0})$ を，定理 A の条件を満たす C^∞ 写像とする．このとき, 定義域の原点の近傍の局所座標 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ と値域 $\boldsymbol{R}^2$ の原点の近傍上で定義された $\boldsymbol{R}^2$ の中への微分同相写像 Φ が存在して

$$\Phi \circ f(\tilde{u}, \tilde{v}) = (k(\tilde{u}, \tilde{v}), \tilde{v}), \quad k(\tilde{u}, \tilde{v}) \equiv_3 \tilde{u}\tilde{v} - \tilde{u}^3 \tag{2.1}$$

を満たし，$\partial_{\tilde{u}} (:= \partial/\partial\tilde{u})$ は拡張された退化ベクトル場にすることができる.

注意 2.2　一般に $f(u, v) = \bigl(k(u, v), v\bigr)$ の形の C^∞ 写像があると，定義域上のベクトル場 ∂_u は拡張された退化ベクトル場となる，つまり，f の特異点集合上で ∂_u は退化ベクトル場を与える．実際，特異点識別子 Λ を f のヤコビ行列式 J_f ととると，

$$\Lambda = J_f = \det(f_u, f_v) = \det \begin{pmatrix} k_u & k_v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = k_u$$

だから, 特異点集合は $\{(u, v)\, ;\, k_u(u, v) = 0\}$ であり，この集合上で

$$df(\partial_u) = f_u = (k_u, 0) = \mathbf{0}$$

が成り立つ.

与えられた f に対して座標変換を順にとっていくことにより命題 2.1 を示す.

補題 2.3　命題 2.1 の条件の下, 定義域の原点の近傍の局所座標 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ と値域 $\boldsymbol{R}^2$ の原点の近傍上の微分同相写像 Φ が存在して

$$\Phi \circ f(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{u}(\tilde{v} + s(\tilde{u}, \tilde{v})), \tilde{v}), \qquad s \in \mathcal{O}(2) \tag{2.2}$$

が成り立つ.

証明 定理 A の条件 (i) から，$f_u(0,0)$，$f_v(0,0)$ のどちらかは零でないので，必要なら u, v を入れ替えて $f_v(0,0) \neq \mathbf{0}$ と仮定してよい．いま，$f(u,v) = (\bar{x}(u,v), \bar{y}(u,v))$ と記すと[1]，必要なら値域 $\boldsymbol{R}^2$ の座標を入れ替えて $\bar{y}_v(0,0) \neq 0$ と仮定してよい．この状況で $\tilde{u} = u$, $\tilde{v} = \bar{y}(u,v)$ とおくと $(u,v) \mapsto (\tilde{u},\tilde{v})$ は，定義域の原点付近での座標変換になる．この座標変換により，f は

$$f(\tilde{u},\tilde{v}) = (\bar{x}(\tilde{u},\tilde{v}), \tilde{v})$$

と書かれる．いま，$\Phi(x,y) := (x - \bar{x}(0,y), y)$ とおくと，これは $\boldsymbol{R}^2$ の原点の近傍上の微分同相写像となる．ここで $\tilde{k}(\tilde{u},\tilde{v}) := \bar{x}(\tilde{u},\tilde{v}) - \bar{x}(0,\tilde{v})$ とおくと

$$\Phi \circ f(\tilde{u},\tilde{v}) = (\tilde{k}(\tilde{u},\tilde{v}), \tilde{v}), \qquad \tilde{k}(0,\tilde{v}) = 0$$

となる．この第 2 式と，因子の補題（本文付録 A の命題 A.1）より，C^∞ 関数 h が存在して $\tilde{k}(\tilde{u},\tilde{v}) = \tilde{u}h(\tilde{u},\tilde{v})$ を満たす．原点は f の特異点なので $h(0,0) = 0$ である．

ここで $\Phi \circ f$ を f に置き換え，特異点識別子 Λ をヤコビ行列式 J_f にとると $\Lambda = h + \tilde{u}h_{\tilde{u}}$ となる．注意 2.2 から，$\tilde{\eta} := \partial_{\tilde{u}}$ は拡張された退化ベクトル場である．定理 A の条件 (ii) より，

$$0 = \Lambda_\eta(0,0) = \Lambda_{\tilde{u}}(0,0) = (h + \tilde{u}h_{\tilde{u}})_{\tilde{u}}\big|_{(\tilde{u},\tilde{v})=(0,0)} = 2h_{\tilde{u}}(0,0) \qquad (2.3)$$

が成り立つ．このことと条件 (i) の非退化性から

$$\Lambda_{\tilde{v}}(0,0) = (h + \tilde{u}h_{\tilde{u}})_{\tilde{v}}\big|_{(\tilde{u},\tilde{v})=(0,0)} = h_{\tilde{v}}(0,0) \neq 0$$

となる．ゆえに $b := h_{\tilde{v}}(0,0)$ とおくと $h(\tilde{u},\tilde{v})$ は

$$h(\tilde{u},\tilde{v}) = b\tilde{v} + s(\tilde{u},\tilde{v}) \qquad (b \neq 0)$$

の形をしている．さらに (2.3) から $s \in \mathcal{O}(2)$ である．そこで $\Psi(x,y) := (x/b, y)$ とおくと

$$\Psi \circ f(\tilde{u},\tilde{v}) = (\tilde{u}(\tilde{v} + s(\tilde{u},\tilde{v})/b), \tilde{v})$$

を得る．$s(\tilde{u},\tilde{v})/b$ を $s(\tilde{u},\tilde{v})$ と書きなおせば主張が示される． □

次の補題は補題 2.3 の $s(\tilde{u},\tilde{v})$ の 2 次の項が $\tilde{u}^2$ の項のみにできるように改良したものである．

---

[1] 本稿では値域の標準座標を (x,y) と書き，それと区別するために，$f(u,v)$ の x 成分，y 成分はそれぞれ $\bar{x}(u,v)$，$\bar{y}(u,v)$ などと書く．

補題 2.4　命題 2.1 の条件の下，定義域の原点の近傍の局所座標 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ と C^∞ 級関数 $k(\tilde{u}, \tilde{v})$ および値域 $\boldsymbol{R}^2$ の原点付近の微分同相写像 Φ が存在して

$$\Phi \circ f(\tilde{u}, \tilde{v}) = (k(\tilde{u}, \tilde{v}), \tilde{v}), \qquad k(\tilde{u}, \tilde{v}) \equiv_3 \tilde{u}(\tilde{v} + a_{30}\tilde{u}^2)$$

が成り立つ．ただし a_{30} は定数である．

証明　補題 2.3 より，f は

$$f(u, v) = (\bar{x}(u, v), v), \quad \bar{x}(u, v) := u(v + s(u, v)), \qquad s \in \mathcal{O}(2) \quad (2.4)$$

と書けているが，$u\, s(u, v) \in \mathcal{O}(3)$ なので a_{30}, a_{21}, $a_{12} \in \boldsymbol{R}$ が存在して

$$u\, s(u, v) \equiv_3 a_{30}u^3 + a_{21}u^2v + a_{12}uv^2$$

を満たす．そこで $k(u, v) := \bar{x}(u, v) - a_{12}\bar{x}(u, v)v$ とおくと

$$k(u, v) \equiv_3 uv + a_{30}u^3 + a_{21}u^2v$$

となる．写像 $\Phi : (x, y) \mapsto (x - a_{12}xy, y)$ を考えると，これは原点の近傍上の微分同相写像であり，$\Phi \circ f(u, v) = (k(u, v), v)$ を満たすが，

$$k(u, v) \equiv_3 uv + a_{30}u^3 + a_{21}u^2v \equiv_3 v(u + a_{21}u^2) + a_{30}(u + a_{21}u^2)^3$$

となる．特に，定義域の新しい局所座標 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ を

$$\tilde{u} := u + a_{21}u^2, \qquad \tilde{v} := v$$

で定めると，主張が得られる．　□

命題 2.1 の証明．補題 2.4 より，f は

$$f(u, v) = (\bar{x}(u, v), v), \quad \bar{x}(u, v) = uv + a_{30}u^3 + r(u, v), \qquad r \in \mathcal{O}(4)$$

の形をしているとしてよい．特異点識別子 Λ を f のヤコビ行列式にとると $\Lambda = v + 3a_{30}u^2 + r_u$ となる．注意 2.2 より $\tilde{\eta} := \partial_u$ は拡張された退化ベクトル場であるから，定理 A の条件 (ii) と $r_u \in \mathcal{O}(3)$ により

$$0 \neq \Lambda_{\eta\eta}(0, 0) = \Lambda_{uu}(0, 0) = 6a_{30}$$

が成り立つ．いま，定義域の局所座標 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ を $u := \tilde{u}/\alpha$, $v := \alpha\tilde{v}$ で定める．ただし α は $\alpha^3 = -a_{30}$ を満たす実数である．このとき $\bar{x}(u, v) \equiv_3 \tilde{u}\tilde{v} - \tilde{u}^3$ となるので，

$$\Phi(x, y) := (x, y/\alpha)$$

で定まる値域の原点付近の微分同相写像 Φ により $\Phi\circ f(\tilde{u},\tilde{v})$ は (2.1) の形をしていることがわかる. □

3　第2段階の座標変換

命題 2.1 より，定理 A の条件を満たしている写像は

$$f(u,v)=(uv-u^3+r(u,v),v),\qquad r\in\mathcal{O}(4) \tag{3.1}$$

と書ける．これから定義域と値域の座標変換により，$r\in\mathcal{O}(7)$ を満たすような r がとれること，すなわち，次の命題を示す：

命題 3.1　$f:(\boldsymbol{R}^2,\mathbf{0})\to(\boldsymbol{R}^2,\mathbf{0})$ を C^∞ 写像で定理 A の条件を満たすものとする．このとき，定義域の原点の近傍の局所座標 $(\tilde{u},\tilde{v})$ と値域 $\boldsymbol{R}^2$ の原点の近傍上の微分同相写像 Φ が存在して

$$\Phi\circ f(\tilde{u},\tilde{v})=\bigl(\tilde{u}\tilde{v}-\tilde{u}^3+r(\tilde{u},\tilde{v}),\tilde{v}\bigr),\quad r\in\mathcal{O}(7) \tag{3.2}$$

が成り立つ．

準備として次の補題を用意する．

補題 3.2　4 以上の整数 d と

$$f(u,v)=\bigl(uv-u^3+r(u,v),v\bigr),\quad r\in\mathcal{O}(d),$$

の形の f に対して定義域の原点の近傍の局所座標 $(\tilde{u},\tilde{v})$ が存在して

$$f(\tilde{u},\tilde{v})=\bigl(\tilde{u}\tilde{v}-\tilde{u}^3+a\tilde{u}^d+r_1(\tilde{u},\tilde{v}),\tilde{v}\bigr),\quad r_1\in\mathcal{O}(d+1) \tag{3.3}$$

と書ける．ただし a は定数である．

証明　関数 $r(u,v)$ を 3 つの部分，すなわち，「u^d の項」,「他の d 次の項」,「$d+1$ 次以上の項」に分けて

$$r(u,v)=au^d+vs(u,v)+t(u,v)$$

と記す．ただし $a\in\boldsymbol{R}$, $s\in\mathcal{O}(d-1)$, $t\in\mathcal{O}(d+1)$ である．このとき

$$\tilde{u}:=u+s(u,v),\qquad \tilde{v}:=v$$

とおくと $s\in\mathcal{O}(d-1)$ $(d\geq 4)$ だから, $(\tilde{u},\tilde{v})$ は定義域の原点付近の局所座標を与える．ここで

$$\tilde{u}\tilde{v}-\tilde{u}^3+a\tilde{u}^d\equiv_d uv-u^3+au^d+vs(u,v)\equiv_d uv-u^3+r(u,v)$$

が成り立つので主張が得られる．　□

さらに，補題 3.2 を用いて，式 (3.1) において $r \in \mathcal{O}(4)$ を $r \in \mathcal{O}(5)$ にできることを示す：

命題 3.3　式 (3.1) の f に対して，定義域の原点の近傍の局所座標 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ と値域 $\boldsymbol{R}^2$ の原点の近傍上の微分同相写像 Φ が存在して

$$\Phi \circ f(\tilde{u}, \tilde{v}) = \bigl(\tilde{u}\tilde{v} - \tilde{u}^3 + r(\tilde{u}, \tilde{v}), \tilde{v}\bigr), \quad r \in \mathcal{O}(5)$$

が成り立つ．

証明　式 (3.1) の f に補題 3.2 を適用し，f が (3.3) の $d = 4$ の形であると仮定してよい．さらに $\alpha := a/2$ とおくと

$$f(u, v) = \bigl(\bar{x}(u, v), v\bigr), \quad \bar{x}(u, v) := uv - u^3 + 2\alpha u^4 + r(u, v), \quad r \in \mathcal{O}(5)$$

と書ける．この状況で，新しい定義域における原点付近の局所座標 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ を

$$\begin{cases} \tilde{u} := & u/(1 + \alpha u), \\ \tilde{v} := & (1 + \alpha u)v - \alpha\bigl(u^3 - 2\alpha u^4 - r(u, v)\bigr) = v + \alpha\bar{x}(u, v) \end{cases}$$

で定めると，$1/(1 + \alpha u) = 1 - \alpha u + \alpha^2 u^2 + \cdots$ から

$$\begin{aligned} \tilde{u}\tilde{v} &\equiv_4 uv - \frac{\alpha u}{1 + \alpha u}\bigl(u^3 - 2\alpha u^4 - r(u, v)\bigr) \equiv_4 \ uv - \alpha u^4, \\ \tilde{u}^3 &= \frac{u^3}{(1 + \alpha u)^3} \equiv_4 \ u^3(1 - \alpha u + \alpha^2 u^2 + \cdots)^3 \equiv_4 \ u^3 - 3\alpha u^4 \end{aligned}$$

となる．この式から

$$\tilde{u}\tilde{v} - \tilde{u}^3 \equiv_4 uv - u^3 + 2\alpha u^4 \equiv_4 \ \bar{x}(u, v)$$

を得る．ゆえに $\Phi : (x, y) \mapsto (x, y + \alpha x)$ で定まる $\boldsymbol{R}^2$ の原点付近の微分同相写像によって

$$\Phi \circ f(u, v) \equiv_4 (\tilde{u}\tilde{v} - \tilde{u}^3, \tilde{v})$$

となる．　□

次を示す．

命題 3.4　式

$$f(u, v) = \bigl(uv - u^3 + r(u, v), v\bigr), \qquad r \in \mathcal{O}(5) \tag{3.4}$$

で与えられた写像 f に対して，定義域の原点の近傍の局所座標 $(\tilde{u},\tilde{v})$ と値域 $\boldsymbol{R}^2$ の原点付近の微分同相写像 Φ が存在して

$$\Phi\circ f(\tilde{u},\tilde{v}) = \bigl(\tilde{u}\tilde{v}-\tilde{u}^3+r(\tilde{u},\tilde{v}),\tilde{v}\bigr),\quad r\in\mathcal{O}(6) \tag{3.5}$$

が成り立つ．

証明　式 (3.4) の f に補題 3.2 を適用して

$$f=\bigl(\bar{x}(u,v),v\bigr),\quad \bar{x}(u,v):=uv-u^3+au^5+r_1(u,v),\quad r_1\in\mathcal{O}(6)$$

の形に書けているとしてよい．この状況で，新しい原点付近の局所座標 $(\tilde{u},\tilde{v})$ を

$$\begin{cases}\tilde{u}:=u-\dfrac{a}{6}uv-\dfrac{a}{3}u^3+\dfrac{a^2}{12}u^3v\\[2mm] \tilde{v}:=v\end{cases}$$

で定めると

$$\tilde{u}^3\equiv_5 u^3-\frac{au^3v}{2}-au^5+\frac{a^2u^3v^2}{12}$$

となる．特に

$$\tilde{u}\tilde{v}-\tilde{u}^3\equiv_5 \bar{x}(u,v)-\frac{av\bar{x}(u,v)}{6}$$

となる．ゆえに

$$\Phi:(x,y)\mapsto\left(x-\frac{axy}{6},y\right),$$

で定まる $\boldsymbol{R}^2$ の局所微分同相写像 Φ により，f は (3.5) の形になる．　□

命題 3.1 の証明． 式 (3.5) において $r\in\mathcal{O}(6)$ から $r\in\mathcal{O}(7)$ にできることを示せばよい．

補題 3.4 より f は (3.5) の形としてよい．さらに補題 3.2 を適用して $a:=4\alpha$ とおくことにより

$$f(u,v)=\bigl(\bar{x}(u,v),v\bigr),$$

ただし

$$\bar{x}(u,v):=uv-u^3+4\alpha u^6+r_1(u,v),\quad r_1(u,v)\in\mathcal{O}(7)$$

と書けているとしてよい．このとき，新しい局所座標 $(\tilde{u},\tilde{v})$ を

$$\begin{cases}\tilde{u}:=u-\alpha u^2v-\alpha u^4,\\ \tilde{v}:=v\end{cases}$$

と定めると

$$\begin{aligned}\tilde{u}\tilde{v}-\tilde{u}^3 &\equiv_6 uv-\alpha u^2v^2+2\alpha u^4 v-u^3+3\alpha u^6\\ &\equiv_6 uv-u^3+4\alpha u^6-\alpha(uv-u^3+4\alpha u^6)^2\end{aligned}$$

であるから

$$\bar{x}(u,v)-\alpha\bar{x}(u,v)^2\equiv_6 \tilde{u}\tilde{v}-\tilde{u}^3$$

が成り立つ．ゆえに，値域の原点付近の微分同相写像 $\Phi:(x,y)\mapsto(x-\alpha x^2,y)$ により，f は (3.2) の形になる． □

4　特異点集合の標準化

命題 3.1 により, 定理 A の条件を満たす写像 f は定義域と値域の原点付近の座標変換により，式 (3.2) の形で表されることがわかった．ここでは，この形の f に対して，特異点集合が標準的ホイットニー・カスプの特異点集合 $\{v=3u^2\}$ と一致するような座標変換を行う．まず，以下の命題を示す．

命題 4.1　$f:(\boldsymbol{R}^2,\boldsymbol{0})\to(\boldsymbol{R}^2,\boldsymbol{0})$ を C^∞ 写像で定理 A の条件を満たすものとする．このとき，定義域の原点の近傍の局所座標 $(\tilde{u},\tilde{v})$ と値域 $\boldsymbol{R}^2$ の原点の近傍上の微分同相写像 Φ が存在して

$$\begin{aligned}&\Phi\circ f(\tilde{u},\tilde{v})=\big(\tilde{u}\tilde{v}-\tilde{u}^3+r(\tilde{u},\tilde{v}),\tilde{v}\big),\qquad r\in\mathcal{O}(6),\\ &r_{\tilde{u}}(\tilde{u},3\tilde{u}^2)=0\end{aligned}$$

が成り立つ．さらに f の特異点集合は $\{\tilde{v}=3\tilde{u}^2\}$ である．

写像 Φ は値域 $\boldsymbol{R}^2$ の微分同相写像なので, f の特異点集合と $\Phi\circ f$ の特異点集合は一致する．

証明　命題 3.1 により f は

$$f(u,v)=\big(uv-u^3+r(u,v),v\big),\quad r\in\mathcal{O}(7) \tag{4.1}$$

と書けているとしてよい．特異点識別子 Λ として f のヤコビ行列式をとると

$$\Lambda(u,v)=v-3u^2+r_u(u,v)$$

が成り立つ．関数 r は $r\in\mathcal{O}(7)$ だから, $\Lambda_v(0,0)\neq 0$ が成り立つ．したがっ

て，陰関数定理より $u=0$ の近傍で定義された1変数の C^∞ 関数 $\varphi(u)$ が存在して

$$\Lambda(u,\varphi(u))=\varphi(u)-3u^2+r_u(u,\varphi(u))=0,\qquad \varphi(0)=0 \tag{4.2}$$

を満たし，f の特異点集合は $\{v=\varphi(u)\}$ となる．式 (4.1) から, $r_u\in\mathcal{O}(6)$ となるので，(4.2) を微分して

$$\varphi'(u)-6u\in\mathcal{O}(5),\quad \varphi''(u)-6\in\mathcal{O}(4),\qquad ({}'=d/du) \tag{4.3}$$

が成り立ち，特に $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$, $\varphi''(0)=6$ となる．ゆえに因子の補題（本文付録 A の命題 A.1）より，C^∞ 関数 $\psi(u)$ が存在して

$$\varphi(u)=3u^2\psi(u),\qquad \psi(0)=1 \tag{4.4}$$

が成り立つ．そこで $s(u):=\sqrt{\psi(u)}$ とおくと， s は $u=0$ の近傍で定義された1変数の C^∞ 関数で,

$$\varphi(u)=3u^2s(u)^2,\qquad s(0)=1$$

を満たす．式 (4.3) により $\varphi^{(3)}(0)=\varphi^{(4)}(0)=\varphi^{(5)}(0)=0$ なので，(4.4) を微分して $\psi'(0)=\psi''(0)=\psi^{(3)}(0)=0$ が従う．ゆえに式 $s(u)=\sqrt{\psi(u)}$ を微分することにより

$$s(0)=1,\quad s'(0)=s''(0)=s^{(3)}(0)=0$$

となるので，C^∞ 関数 s_1 が存在して

$$us(u)=u+s_1(u)\qquad s_1\in\mathcal{O}(5)$$

が成り立つ．したがって $(\tilde u,\tilde v):=(u+s_1(u),v)$ とおくと，これは原点付近で $\boldsymbol{R}^2$ の新しい局所座標となる．とくに $u=\tilde u+s_2(\tilde u)$ ($s_2\in\mathcal{O}(5)$) と書けるので,

$$uv-u^3\equiv_7\tilde u\tilde v-\tilde u^3+s_2(\tilde u)\tilde v\equiv_6\tilde u\tilde v-\tilde u^3$$

を満たす．式 (4.1) から,

$$f(u,v)=\bigl(k(\tilde u,\tilde v),\tilde v\bigr),\quad k(\tilde u,\tilde v):=\tilde u\tilde v-\tilde u^3+r_1(\tilde u,\tilde v)\quad r_1\in\mathcal{O}(6)$$

と書けるが,

$$\varphi(u)=3(us(u))^2=3(u+s_1(u))^2=3\tilde u^2$$

だから, f の特異点集合は $\{(u,v)\,;v=\varphi(u)\})$ は $\{(\tilde u,\tilde v)\,;\,\tilde v=3\tilde u^2\}$ と書け

る．最後に $\tilde{v}=3\tilde{u}^2$ を関数 k の定義式を微分した式に代入して

$$0=k_{\tilde{u}}=\tilde{v}-3\tilde{u}^2+(r_1)_{\tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v})=(r_1)_{\tilde{u}}(\tilde{u},3\tilde{u}^2)$$

が得られる． □

5　特異点集合の像の標準化

以下を示す．

命題 5.1　$f:(\boldsymbol{R}^2,\mathbf{0})\to(\boldsymbol{R}^2,\mathbf{0})$ を C^∞ 写像で定理 A の条件を満たすものとする．このとき，定義域の原点の近傍の局所座標 $(\tilde{u},\tilde{v})$ と値域 $\boldsymbol{R}^2$ の原点の近傍上の微分同相写像 Φ が存在して

$$\Phi\circ f(\tilde{u},\tilde{v})=\big(\tilde{u}\tilde{v}-\tilde{u}^3+r(\tilde{u},\tilde{v}),\tilde{v}\big),\quad r\in\mathcal{O}(3) \tag{5.1}$$

という形に書け，r は

$$r(\tilde{u},3\tilde{u}^2)=r_{\tilde{u}}(\tilde{u},3\tilde{u}^2)=r_{\tilde{v}}(\tilde{u},3\tilde{u}^2)=0 \tag{5.2}$$

を満たす．さらに $\Phi\circ f(\tilde{u},\tilde{v})$ に対して $\{\tilde{v}=3\tilde{u}^2\}$ は特異点集合で，$\{27x^2=4y^3\}$ は特異点集合の像である．

注意 5.2　式 (5.2) を満たす r により式 (5.1) で与えられた $\Phi\circ f(\tilde{u},\tilde{v})$ に対して命題の最後の主張は次のように示される．まず, $(\Phi\circ f)_{\tilde{u}}(\tilde{u},3\tilde{u}^2)=\mathbf{0}$ となるので, 特異点集合は $\{\tilde{v}=3\tilde{u}^2\}$ であり, $\Phi\circ f(\tilde{u},3\tilde{u}^2)=(2\tilde{u}^3,3\tilde{u}^2)$ が成り立つ．したがって，特異点集合の像は $\{27x^2=4y^3\}$ である．これらは標準的ホイットニー・カスプ $(*)$ の特異点集合とその像に一致する．

証明　命題 4.1 により，f は

$$f(u,v)=\big(uv-u^3+r(u,v),v\big),\ \ r_u(u,3u^2)=0,\quad r\in\mathcal{O}(6) \tag{5.3}$$

としてよい．ここで, $r(u,v)\in\mathcal{O}(6)$ だから，$r(u,3u^2)\in\mathcal{O}(6)$ で, 因子の補題（本文付録 A の命題 A.1）により，1 変数の C^∞ 関数 ρ が存在して

$$r(u,3u^2)=u^2\rho(u),\qquad \rho(u)\in\mathcal{O}(4)$$

を満たす．右辺の関数 $\rho(u)$ を以下のように奇関数と偶関数に分解する:

$$\rho(u)=\rho_1(u)+\rho_2(u)\quad\left(\rho_1(u):=\frac{\rho(u)+\rho(-u)}{2},\ \rho_2(u):=\frac{\rho(u)-\rho(-u)}{2}\right).$$

このとき, ホイットニーの補題（本文第 3 章の定理 3.1.7）より, 1 変数の C^∞ 関数 s_1, s_2 が存在して

$$\rho_1(u) = s_1(u^2), \qquad \rho_2(u) = us_2(u^2)$$

$\rho \in \mathcal{O}(4)$ であることから，$s_1(t) \in \mathcal{O}(2)$ と $s_2(t) \in \mathcal{O}(1)$ がわかる．1 変数の C^∞ 関数 σ_1, σ_2 を

$$\sigma_1(t) := -\frac{2ts_1(t/3)}{3(2+s_2(t/3))}, \quad \sigma_2(t) := -\frac{s_2(t/3)}{2+s_2(t/3)}$$

によって定めると，$\sigma_1 \in \mathcal{O}(3)$ と $\sigma_2 \in \mathcal{O}(1)$ がわかる．

関数 s_1, s_2 の定義から $r(u, 3u^2) = u^2\bigl(s_1(u^2) + us_2(u^2)\bigr)$ だから

$$R(u) := \sigma_1(3u^2) + \bigl(2u^3 + r(u, 3u^2)\bigr)\sigma_2(3u^2) \tag{5.4}$$

とおくと，直接計算により

$$R(u) = -u^2\bigl(s_1(u^2) + us_2(u^2)\bigr) = -r(u, 3u^2) \tag{5.5}$$

を示すことができる．

そこで, $\boldsymbol{R}^2$ の原点付近の局所微分同相写像 Φ を

$$\Phi : (x, y) \mapsto \Bigl(x\bigl(1 + \sigma_2(y)\bigr) + \sigma_1(y), y\Bigr)$$

と定め，C^∞ 関数 $k(u, v)$ を

$$\Phi \circ f(u, v) = \bigl(k(u, v), v\bigr) \tag{5.6}$$

で定めると

$$k(u, v) = (uv - u^3 + r(u, v))(1 + \sigma_2(v)) + \sigma_1(v)$$

となる．式 (5.4) と式 (5.5) の右辺は等しいので,

$$k(u, 3u^2) = 2u^3 + r(u, 3u^2) + R(u) = 2u^3$$

が成り立つ．関数 $r_1(u, v)$ を

$$r_1(u, v) := k(u, v) - (uv - u^3) \tag{5.7}$$

と定めると，$r \in \mathcal{O}(6)$，$\sigma_1 \in \mathcal{O}(3)$，$\sigma_2 \in \mathcal{O}(1)$ だから

$$r_1(u, v) = r(u, v) + (uv - u^3 + r(u, v))\sigma_2(v) + \sigma_1(v) \in \mathcal{O}(3) \tag{5.8}$$

が成り立つ．ゆえに

$$r_1(u, 3u^2) = (r_1)_u(u, 3u^2) = (r_1)_v(u, 3u^2) = 0 \tag{5.9}$$

を示すことができれば r_1 を r と書き直すことで主張が示せる．以下でこれを示す．式 (5.8) と (5.4) と (5.5) の右辺が等しいことから

$$r_1(u,3u^2)=r(u,3u^2)+R(u)=0$$

が成り立つ．次に $(r_1)_u(u,3u^2)=0$ を示す．式 (5.3) の f の特異点集合は $\{v=3u^2\}$ であり，∂_u は拡張された退化ベクトル場（注意 2.2）だから $f_u(u,3u^2)=0$ がわかる．ゆえに (5.6) より $k_u(u,3u^2)=0$ となる．ここで式 (5.7) から

$$0=k_u(u,3u^2)=(r_1)_u(u,3u^2)$$

となるので $(r_1)_u(u,3u^2)=0$ がわかる．

最後に $(r_1)_v(u,3u^2)=0$ を示す．式 $r_1(u,3u^2)=0$ を u で微分して

$$0=\frac{d}{du}r_1(u,3u^2)=(r_1)_u(u,3u^2)+6u(r_1)_v(u,3u^2)=6u(r_1)_v(u,3u^2)$$

となるので，$u\neq 0$ に対して $(r_1)_v(u,3u^2)=0$ が成り立つが，連続性より $u=0$ でも同じ式が成り立つ． □

6 定理 A の証明

定理 A の証明． 命題 4.1 から f は (5.2) を満たす r によって (5.1) の形で書かれているとしてよい．関数 $\tilde{r}$ を

$$\tilde{r}(u,t):=r(u,t+3u^2),$$

で定めると (5.2) から，

$$\tilde{r}(u,0)=r(u,3u^2)=0,\quad \tilde{r}_t(u,0)=r_v(u,3u^2)=0$$

が成り立つ．ゆえに，因子の補題（本文付録 A の命題 A.1）から C^∞ 関数 ρ が存在して $\tilde{r}(u,t)=t^2\rho(u,t)$ と書ける．この式の t に $v-3u^2$ を代入して

$$r(u,v)=(v-3u^2)^2r_1(u,v)$$

となる．ただし $r_1(u,v):=\rho(u,v-3u^2)$ である．関数 r は $O(3)$ に属するので $r_1\in\mathcal{O}(1)$ となる．ところで，いま，変数 u,v,w の C^∞ 関数 H を

$$H(u,v,w):=\Big(1-3uw-(v-3u^2)w^2\Big)w-r_1(u,v)$$

で定めると，$H(0,0,0)=0$, $H_w(0,0,0)=1$ となるので，陰関数定理より C^∞ 関数 $(w=)a(u,v)$ が存在して

$$H(u,v,a(u,v))=0, \quad a(0,0)=0$$

が成り立つ．逆写像定理により，$(\tilde{u},\tilde{v}) := (u+(v-3u^2)a(u,v),v)$ で定まる $(\tilde{u},\tilde{v})$ は原点付近の局所座標となる．このとき，

$$\tilde{u}\tilde{v}-\tilde{u}^3-\bigl(uv-u^3+r(u,v)\bigr)=(v-3u^2)^2H(u,v,a(u,v))=0$$

が成り立つ．ゆえに $f(\tilde{u},\tilde{v})=(\tilde{u}\tilde{v}-\tilde{u}^3,\tilde{v})$ となる． $\square$

参考文献

[W] H. Whitney, *On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane*, Ann. of Math. **62** (1955), 374–410.

[GG] M. Golubitsky and V. Guillemin, Stable mappings and their singularities, Graduate Texts in Mathematics, **14**, Springer-Verlag, 1973.

[USY] 梅原雅顕・佐治健太郎・山田光太郎，特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学，2017，丸善出版．ISBN:978-4-621-30215-6

[USY-E] M. Umehara, K. Saji and K. Yamada, Differential Geometry of Curves and Surfaces with Singularities, *translated by W. Rossman*, 2021, World Scientific Publ., 2021. https://doi.org/10.1142/12284